Fondamenti di Automatica

Teorema del valore finale

Gabriele Frassi

Studente del corso di laurea triennale in *Ingegneria Informatica*

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)
Università di Pisa

A.A.2022-2023

Indice I

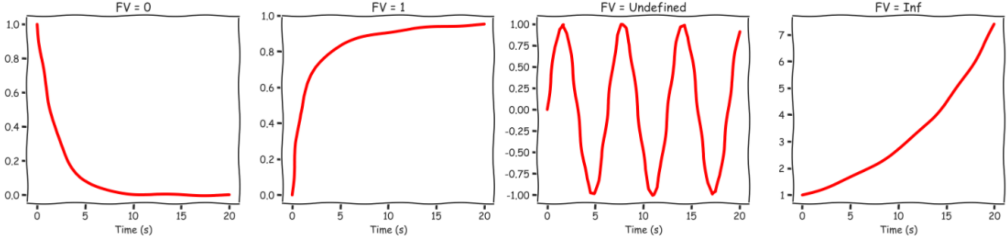
Appunti personali di Fondamenti di Automatica riguardo il teorema del valore finale. Nella scrittura si è fatto affidamento agli appunti del prof. Munafò, ma si è approfondita la sezione sul *valore finale dell'errore*.

Se questi appunti sono stati utili e vuoi ringraziarmi in qualche modo:
`https://www.paypal.com/paypalme/GabrieleFrassi`

1 Teorema del valore finale

1.1 Introduzione

Data una formula $f(t)$ abbiamo tre situazioni possibili:



1. l'output converge a un singolo valore (Esiste un **valore finale**);
2. l'output oscilla all'infinito (Il valore finale è indeterminato);
3. l'output tende a infinito (Il valore finale è inf).

Vogliamo calcolare il valore finale quando ci troviamo nella prima situazione!

Se siamo nel dominio del tempo la cosa è semplice: il limite con $t \to \infty$

Valore finale nel dominio del tempo

Possiamo trovare il *valore finale* nel dominio del tempo risolvendo il limite $\lim_{t \to \infty} f(t)$

1 Teorema del valore finale

1.3 Valore finale nel dominio di Laplace: enunciato del teorema

Supponiamo di avere una funzione $X(s)$ nel dominio di Laplace e di voler calcolare il valore finale: siamo obbligati a porre la funzione $x(t)$ nel dominio del tempo? No, possiamo usare il seguente teorema

Teorema del valore finale

Possiamo affermare che

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

se e solo se (CNS $\Longleftrightarrow$) il sistema *lineare tempo-invariante* che produce $x(t)$ è stabile.

Dobbiamo tenere a mente che non è possibile applicare questo teorema "bendati", cioè calcolare il valore finale senza prima controllare se il sistema è stabile.

- Se il sistema è stabile il teorema è applicabile e il limite restituisce un valore sensato.
- Se il sistema è instabile non ha senso parlare di valore finale: il limite restituisce un valore finito che non ha alcun senso.

1 Teorema del valore finale I

1.4 Regioni del piano cartesiano: applicabilità del teorema

Consideriamo le regioni del piano cartesiano dove possono essere presenti poli:

1. **Right Half Plane**.
   Il sistema ha almeno un polo nel primo e nel quarto quadrante del piano cartesiano: questo significa che abbiamo poli con parte reale $\mathrm{Re} > 0$, il sistema non è stabile ed e^{+st} va a infinito. Non esiste un valore finale finito. Consideriamo il seguente esempio

   $$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

   che ha come polo $p = 2$. Non possiamo applicare il teorema, ma facciamolo lo stesso. Il limite restituisce un valore finito che contraddice quanto detto prima

   $$\lim_{s \to 0} \frac{s}{s-2} = 0$$

   Se avessi applicato il teorema "bendato" avrei pensato a un sistema che converge a un valore finito, ma non è così!

2. **Imaginary axis**.
Il sistema ha almeno un polo sull'asse immaginario (esclusa l'origine da questi ragionamenti): tali poli hanno tutti parte reale $\mathrm{Re} = 0$. Abbiamo una funzione del tipo $e^{j\omega t}$, che ha andamento sinusoidale.

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Segue che il valore finale è indefinito. Consideriamo l'esempio $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$, che ha come poli $p_1 = 2j, p_2 = -2j$. Non possiamo applicare il teorema, ma facciamolo lo stesso. Il limite restituisce un valore finito che contraddice quanto detto prima

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+4} = 0$$

Se avessi applicato il teorema "bendato" avrei pensato a un sistema che converge a un valore finito, ma non è così!

1 Teorema del valore finale III

1.4 Regioni del piano cartesiano: applicabilità del teorema

3. **Left Half Plane.**
Se ci troviamo nel secondo e nel terzo quadrante del piano cartesiano significa che abbiamo poli con parte reale $\text{Re} < 0$: questo significa che il sistema è stabile ed eventualmente tenderà a zero.

$$\boxed{\text{Possiamo applicare il teorema!}}$$

Consideriamo il seguente esempio

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Se applichiamo il teorema del valore finale otteniamo

$$\lim_{s \to 0} \frac{s}{s+2} = 0$$

che risulta sensato!

1 Teorema del valore finale IV

1.4 Regioni del piano cartesiano: applicabilità del teorema

4. **The origin**.
   Parte reale e parte immaginaria nulla: l'origine! Un esempio di sistema è l'integratore. La risposta all'impulso (*delta di Dirac*) di un integratore è, come possiamo immaginarci, 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Consideriamo il seguente esempio

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Se applichiamo il teorema del valore finale otteniamo

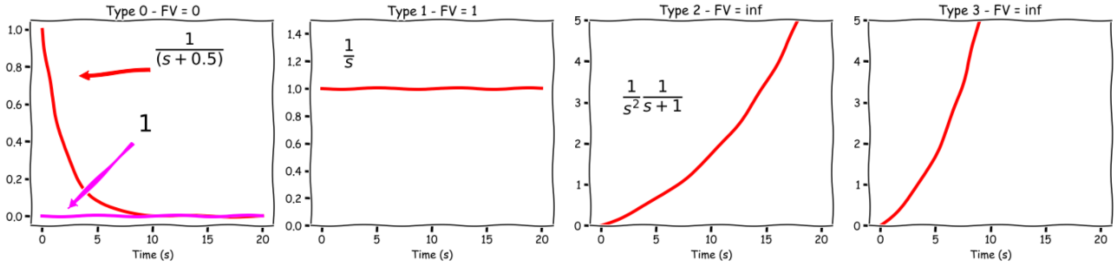
$$\lim_{s \to 0} \frac{s}{s} = 1$$

Il valore è giusto!

Definizione di *system type*

Il numero di poli sull'origine definisce la tipologia di sistema (*System Type*).

Cosa succede in un sistema al variare del *system type*?



1 Teorema del valore finale II

1.5 Definizione di *system type* e convergenza

- **Type 0**.
  - Non ci sono poli sull'origine.
  - Se tutti i poli sono nel *Left Half Plane* allora il valore finale è zero.
- **Type 1**.
  - Un polo sta sull'origine.
  - Se tutti i poli sono nel *Left Half Plane* allora il valore finale è un numero reale.
- **Type 2**.
  - Due poli stanno sull'origine.
  - Il valore finale è inf.
- **Type 3**.
  - Tre o più poli stanno sull'origine.
  - Il valore finale è inf.

Consideriamo il seguente sistema, ponendo come ingresso la funzione $u(t) = \delta(t) \longleftrightarrow U(s) = 1$

$$G(s) = 1 \cdot \frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s^2 + s}$$

Il sistema è di tipo 1, caratterizzato da poli $p = 0, p = -1$.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

A queste condizioni sappiamo che esiste un valore finito, quindi possiamo applicare il teorema del valore finale

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

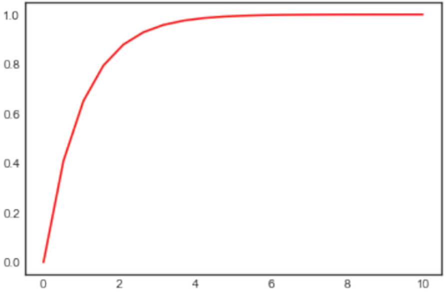
1 Teorema del valore finale II

1.6 Esempio di applicazione del teorema

La cosa è perfettamente sensata: tracciamo la risposta nel dominio del tempo

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1} \implies Y(t) = 1 - e^{-t}$$

Abbiamo una funzione che tende ad 1 con $t \to \infty$



Variazione dell'esempio. Consideriamo lo stesso sistema, ma cambiamo l'input: funzione gradino!

$$u(t) = 1(t) \Longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

La funzione risultante sarà

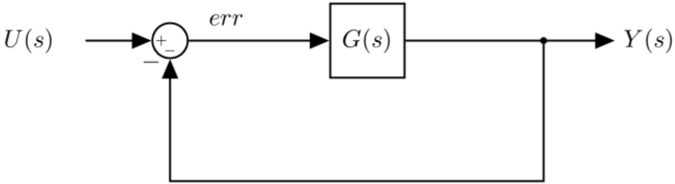
$$G(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{s+1}$$

Il sistema è di tipo 2: il valore tende a infinito! La sostanza è che per mezzo di certi input andiamo ad aggiungere poli all'origine, ergo incrementiamo il *system type*.

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) I

2.1 Calcolo della formula

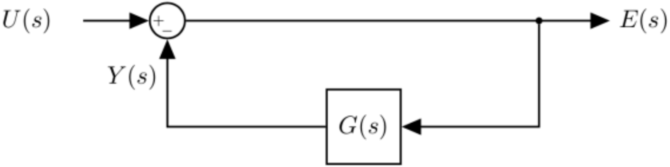
Vogliamo trovare il valore finale dell'errore (*Steady state error*) in un sistema ad anello (*feedback system*). Perchè?



Poniamo $Y(s)$ in anello in modo tale che possano essere individuati errori, ergo fare in modo che l'output segua l'input nel modo più fedele possibile. Rappresentiamo il sistema precedente in una forma equivalente

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) II

2.1 Calcolo della formula



Sappiamo che $E(s) = U(s) - Y(s)$ e $Y(s) = G(s)E(s)$. Sostituiamo la seconda equazione nella prima

$$E(s) = U(s) - Y(s) = U(s) - G(s)E(s)$$

Raccogliamo a primo membro rispetto ad $E(s)$: troviamo

$$E(s) + G(s)E(s) = U(s) \longrightarrow E(s)\left[1 + G(s)\right] = U(s) \longrightarrow \boxed{E(s) = \frac{U(s)}{1 + G(s)}}$$

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) III

2.1 Calcolo della formula

A questo punto possiamo applicare il teorema del valore finale

$$E_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = s \frac{U(s)}{1 + G(s)}$$

Adesso possiamo trovare il valore finale dell'errore sostituendo $U(s)$ con l'input di cui vogliamo studiare la risposta. Aiutiamoci con le nozioni sul sito `https://www.andreaminini.org/`.

Quanto segue è di importanza fondamentale per la progettazione di un controllore (rispetto dei requisiti sull'errore.)

1. **L'input è una funzione gradino**. Se l'input è una funzione gradino allora $U(s) = \frac{1}{s}$.

$$E_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + L(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} L(s)}$$

- Se $L(s)$ è di tipo 0 allora $L(s) = K$. Otteniamo che E_{ss} restituisce un valore costante.

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) IV

2.1 Calcolo della formula

- Se $L(s)$ è di tipo 1 allora $L(s) = \frac{K}{s}$. Il limite va a infinito, quindi anche il denominatore di E_{ss}: segue che $E_{ss} = 0$
- Se $L(s)$ è di tipo 2 allora $L(s) = \frac{K}{s^2}$. Il limite va a infinito, quindi anche il denominatore di E_{ss}: segue che $E_{ss} = 0$.

2. **L'input è una funzione rampa**. Se l'input è una funzione rampa allora $U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{1}{s}}{1 + L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s + \lim_{s\to 0} sL(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sL(s)}$$

- Se $L(s)$ è di tipo 0 allora $L(s) = K$. Otteniamo che $\lim_{s\to 0} sL(s) = 0$ e quindi il denominatore di E_{ss} è nullo: il risultato è che E_{ss} tende a ∞.
- Se $L(s)$ è di tipo 1 allora $L(s) = \frac{K}{s}$. Otteniamo che $\lim_{s\to 0} sL(s) = K$ e quindi il denominatore di E_{ss} è costante: segue che E_{ss} restituisce un valore costante.
- Se $L(s)$ è di tipo 2 allora $L(s) = \frac{K}{s^2}$. Otteniamo che $\lim_{s\to 0} sL(s) = \infty$ e quindi il denominatore di E_{ss} va a infinito: segue che $E_{ss} = 0$.

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) V

2.1 Calcolo della formula

3. **L'input è una funzione parabola**. Se l'input è una funzione parabola allora $U(s) = \frac{1}{s^3}$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s^3}}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{1}{s^2}}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2L(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 + \lim\limits_{s\to 0} s^2L(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2L(s)}$$

- Se $L(s)$ è di tipo 0 allora $L(s) = K$. Otteniamo che $\lim_{s\to 0} s^2L(s) = 0$ e quindi il denominatore di E_{ss} è nullo: il risultato è che E_{ss} tende a ∞.
- Se $L(s)$ è di tipo 1 allora $L(s) = \frac{K}{s}$. Otteniamo che $\lim_{s\to 0} s^2L(s) = 0$ e quindi il denominatore di E_{ss} è nullo: il risultato è che E_{ss} tende a ∞.
- Se $L(s)$ è di tipo 2 allora $L(s) = \frac{K}{s^2}$. Otteniamo che $\lim_{s\to 0} s^2L(s) = K$ e quindi il denominatore di E_{ss}è costante: segue che E_{ss} restituisce un valore costante.

	Type 0	**Type 1**	**Type 2**
$1/s$	costante	0	0
$1/s^2$	∞	costante	0
$1/s^3$	∞	∞	costante

Attenzione: prossime diapositive!

Si vedano le diapositive successive dopo aver affrontato il *loop shaping*.

Gli esempi che seguono rappresentano il massimo di esempio di applicazione del teorema del valore finale nella prova scritta.

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) I

2.2 Esempio: ingresso a gradino, nessun errore di tracciamento

Per risolvere la richiesta si fa ricorso al teorema del valore finale. Sappiamo che

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{U(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

La richiesta è soddisfatta se $E_{ss} = 0$. Poniamo $U(s) = \frac{1}{s}$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + R(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} R(s)G(s)} = 0$$

Affinchè $E_{ss} \to 0$ è necessario che $\lim_{s\to 0} R(s)G(s) = \infty$: la cosa è possibile solo se $R(s)$ è almeno di tipo 1 (almeno un polo nell'origine). Quindi imponiamo

$$R(s) = \frac{K}{s}$$

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) II

2.2 Esempio: ingresso a gradino, nessun errore di tracciamento

Esempio 1. Consideriamo l'impianto $G(s) = 2000\dfrac{10}{s(s+10)(s+2)^3}$

Sappiamo che l'ingresso è $U(s) = \frac{1}{s}$ (gradino). Vogliamo progettare un controllore $R(s)$ con errore zero a regime, cioè

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+R(s)G(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} R(s)G(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} 2000\dfrac{10}{s(s+10)(s+2)^3}R(s)} = 0$$

Affinchè $E_{ss} \to 0$ è necessario che

$$\lim_{s\to 0} 2000\frac{10}{s(s+10)(s+2)^3} = \infty$$

Cosa che già avviene dato che il sistema è di tipo 1. Requisito già soddisfatto, non serve introdurre un ulteriore polo per mezzo di $R(s)$

Esempio 2. Consideriamo l'impianto

$$G(s) = \frac{9}{(s^2 + s + 0.5)(s + 2.5)}$$

Sappiamo che l'ingresso è $U(s) = \frac{1}{s}$ (gradino). Vogliamo progettare un controllore $R(s)$ con errore zero a regime, cioè

$$E_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} \frac{9}{(s^2 + s + 0.5)(s + 2.5)}} = 0$$

Affinchè $E_{ss} \to 0$ è necessario che

$$\lim_{s \to 0} \frac{9}{(s^2 + s + 0.5)(s + 2.5)} = \infty$$

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) IV

2.2 Esempio: ingresso a gradino, nessun errore di tracciamento

Cosa che in questo momento non avviene dato che il sistema è di tipo 0! Risolviamo introducendo un controllore integrale del tipo

$$R(s) = \frac{K}{s}$$

A questo punto otteniamo

$$\lim_{s \to 0} R(s)G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{9K}{s(s^2 + s + 0.5)(s + 2.5)} = \infty$$

Adesso il limite tende a infinito, dato che il sistema è di tipo 1!

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) I

2.3 Esempio: ingresso a rampa, al più un errore di tracciamento del 5%

Sappiamo che

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{U(s)}{1+R(s)G(s)}$$

La richiesta è soddisfatta se $E_{ss} \leq 5\% = 0.05$. Poniamo $U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s^2}}{1+R(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{1}{s}}{1+R(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sR(s)G(s)} \leq 0.05$$

Supponiamo $G(s) = \dfrac{10}{s+0.1}$ e $R(s) = \frac{K}{s}$. Dobbiamo determinare un valore K tale per cui il requisito risulta essere soddisfatto.

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + s\frac{K}{s}\frac{10}{s+0.1}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{10K}{s+0.1}} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s + \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{10K}{s+0.1}} = \frac{1}{100K} \leq 0.05$$

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) II

2.3 Esempio: ingresso a rampa, al più un errore di tracciamento del 5%

Da cui

$$\frac{1}{100K} \leq 0.05 \implies 100K \geq \frac{1}{0.05} \implies \boxed{K \geq 0.02}$$

cioè $K \geq -14\,\text{dB}$.

Esempio. Consideriamo l'impianto

$$G(s) = \frac{100(20-s)}{(s+4)(s+25)^2}$$

Sappiamo che l'input è $U(s) = \frac{1}{s}$ (gradino). Vogliamo progettare un controllore $R(s)$ che abbia un errore in risposta all'ingresso inferiore al 3%. Questo significa dire che

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1+R(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+R(s)G(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} R(s)G(s)} \leq 3\% = 0.03$$

2 Valore finale dell'errore (errore a regime) III

2.3 Esempio: ingresso a rampa, al più un errore di tracciamento del 5%

Dobbiamo trovare i valori K per cui il requisito risulta essere soddisfatto

$$E_{ss} = \frac{1}{1 + K \lim_{s \to 0} \frac{100(20-s)}{(s+4)(s+25)^2}} \leq 3\% = 0.03$$

Il limite ha come risultato

$$\lim_{s \to 0} K \frac{100(20-s)}{(s+4)(s+25)^2} = \frac{100 \cdot 20}{4 \cdot 25^2} = 0.8$$

Da cui

$$E_{ss} = \frac{1}{1 + K0.8} \leq 0.03 \longrightarrow 1 \leq 0.03 + 0.024K \longrightarrow K0.024 \geq 0.97 \longrightarrow \boxed{K \geq 40.4 \text{ c.a.}}$$