Fondamenti di Automatica

Risposta frequenziale e Diagrammi di Bode

Gabriele Frassi

Studente del corso di laurea triennale in *Ingegneria Informatica*

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)
Università di Pisa

A.A.2022-2023

Indice I

Appunti personali di Fondamenti di Automatica riguardo i diagrammi di Bode. Nella scrittura si è fatto affidamento agli appunti del prof. Munafò.

Se questi appunti sono stati utili e vuoi ringraziarmi in qualche modo:

`https://www.paypal.com/paypalme/GabrieleFrassi`

Indice II

1 Introduzione

1.1 Teorema introduttivo e definizione di risposta frequenziale

Consideriamo un sistema *lineare tempo-invariante* la cui funzione di trasferimento è $G(s)$.

Teorema

Poniamo in ingresso in un sistema lineare tempo-invariante il segnale $u(t) = A\sin(\omega t)$: se il sistema è <u>asintoticamente stabile</u> allora il segnale in uscita sarà una funzione sinusoidale avente la seguente forma:

$$y(t) = A|G(j\omega)| \sin\left[\omega t + \angle G(j\omega))\right]$$

$G(j\omega)$ è un numero complesso $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$. Si osservi che la frequenza non cambia (ω), ma si introducono due valori:

- $|G(j\omega)|$ rappresenta il guadagno (*gain*), quanto varia l'ampiezza massima;
- $\angle G(j\omega)$ è il *phase shift*.

Risposta frequenziale

$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$ è detta **risposta frequenziale** (o risposta in frequenza)

Numeri complessi

Ricordarsi le nozioni base sui numeri complessi!

$$z = x + j \cdot y \qquad\qquad z = |z| e^{j\angle z}$$

I numeri complessi sono composti di parte reale (x) e parte immaginaria ($j \cdot y$)

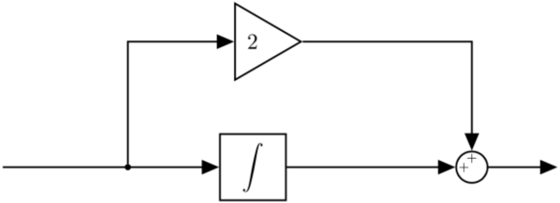
- **Forma cartesiana**. Si rappresentano sul piano cartesiano ponendo la parte reale sull'asse x e la parte immaginaria sull'asse y.
- **Forma polare**. Possiamo rappresentarli considerando il modulo $|z|$ e l'angolo $\angle z$. Ricordiamo che (occhio all'arcotangente, riprese nozioni di Elettrotecnica)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \angle z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & a > 0 \, \forall b \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & a < 0, b > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & a < 0, b < 0 \end{cases}$$

1 Introduzione I

1.3 Esempio: unica funzione sinusoidale da somma di funzioni sinusoidali

Consideriamo il seguente sistema



L'output è la somma di due segnali, ciascuno una manipolazione del segnale di ingresso.

- Un segnale è quello di ingresso amplificato di un fattore 2.
- Un segnale è l'integrale di quello di ingresso.

1 Introduzione II

1.3 Esempio: unica funzione sinusoidale da somma di funzioni sinusoidali

Supponiamo di porre in ingresso il segnale sinusoidale seguente

$$y(t) = \sin(0.5t)$$

Applichiamo le regole viste per i *parallel blocks* e sommiamo

$$y(t) = 2\sin(0.5t) + \int \sin(0.5t)dt = 2\sin(0.5t) - \frac{1}{0.5}\cos(0.5t)$$

Fermi un attimo: qua non ci si ricorda come si risolve un cavolo di integrale

Risolviamo l'integrale per sostituzione ponendo $x = 0.5t$, $\frac{dx}{dt} = 0.5 \longrightarrow dx = 0.5dt \longrightarrow dt = \frac{1}{0.5}dx$

$$\int \sin(0.5t)dt = \int \sin(x)\frac{1}{0.5}dx = \frac{1}{0.5}\int \sin(x)dx = -\frac{1}{0.5}\cos(x) = -\frac{1}{0.5}\cos(0.5t)$$

1.3 Esempio: unica funzione sinusoidale da somma di funzioni sinusoidali

Ricordiamo dalla trigonometria che

$$\boxed{a\sin(x) + b\cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \phi)}$$

dove $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Applichiamo

$$\begin{aligned} y(t) = 2\sin(0.5t) + \int \sin(0.5t)dt = 2\sin(0.5t) - 2\cos(0.5t) &= \sqrt{8}\sin(0.5t + \arctan(-1)) \\ &= 2.83\sin(0.5t - 0.78\ldots) \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un'unica funzione sinusoidale avente la stessa frequenza di partenza!

$$\boxed{\text{Tutto giusto, ma abbiamo lavorato con una sola frequenza!}}$$

1 Introduzione IV

1.3 Esempio: unica funzione sinusoidale da somma di funzioni sinusoidali

Cosa ci interessa?

In generale andiamo a considerare un range di frequenze. Vogliamo rappresentare all'interno dello spettro delle frequenze:

- il guadagno (*gain*), e
- lo spostamento di fase (*phase shift*).

cioè considerare i valori $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ al variare della frequenza ω! Se facciamo ciò allora possiamo determinare la risposta del sistema ad un qualunque segnale sinusoidale!

2 Introduzione ai diagrammi di Bode I

$$y(t) = A|G(j\omega)| \sin\left[\omega t + \angle G(j\omega)\right)]$$

Possiamo fare quanto detto utilizzando i *diagrammi di Bode*!

Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono due diagrammi:

- **Diagramma del guadagno**.
  Diagramma con cui rappresentiamo il guadagno (unità di misura *Decibel*, dB) in funzione della frequenza ω (unità di misura rad/s).
- **Diagramma della fase**.
  Diagramma con cui rappresentiamo la fase (unità di misura gradi, deg) in funzione della frequenza ω (unità di misura rad/s).

2 Introduzione ai diagrammi di Bode II

Prendiamo l'esempio citato nell'introduzione e generalizziamo.

$$y(t) = a\sin(\omega t) + \int \sin(\omega t) = a\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\cos(\omega t)$$

Applichiamo la formula trigonometrica

$$y(t) = \sqrt{a^2 + \left(-\frac{1}{\omega}\right)^2} \sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{a}\right)\right] = \sqrt{a^2 + \frac{1}{\omega^2}} \sin\left[\omega t + \arctan\left(-\frac{1}{a\omega}\right)\right]$$

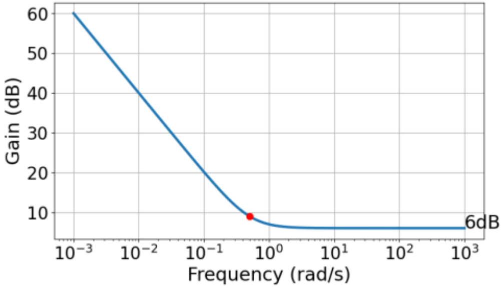
Poniamo $a = 2$ come prima

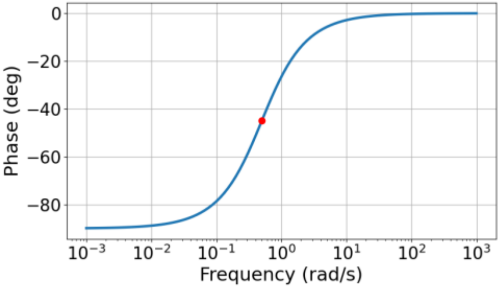
$$\boxed{y(t) = \sqrt{4 + \frac{1}{\omega^2}} \sin\left[\omega t + \arctan\left(-\frac{1}{2\omega}\right)\right]}$$

2 Introduzione ai diagrammi di Bode III

Rappresentiamo graficamente le seguenti funzioni (entrambe dipendono dalla frequenza ω). Per ragioni storiche si traccia il grafico del guadagno ponendo il $20\log_{10}$ e adottando una scala logaritmica. Per quanto riguarda il grafico della fase la si indica in gradi.

$$\text{Gain} = \boxed{|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|} = 20\log_{10}\left(\sqrt{4+\frac{1}{\omega^2}}\right) \qquad \text{Phase} = \arctan\left(-\frac{1}{2\omega}\right)$$





2 Introduzione ai diagrammi di Bode IV

Perchè la scala logaritmica?

Spiegato da Brian Douglas in uno dei suoi video.

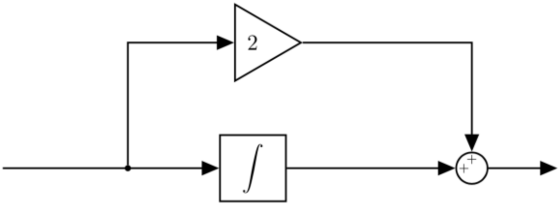
Alcune proprietà del logaritmo da ricordare

1. $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$
2. $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log(A) - \log(B)$
3. $\log(y^x) = x \log y$
4. $|G(j\omega)|_{dB} > 0 \longrightarrow |G(j\omega)| > 1$
5. $|G(j\omega)|_{dB} < 0 \longrightarrow |G(j\omega)| < 1$
6. $|G(j\omega)|_{dB} = 0 \longrightarrow |G(j\omega)| = 1$

Ricordarsi in particolare della (1) e della (2) più avanti, quando cercheremo di rappresentare a mano i diagrammi di Bode di funzioni non banali.

3 Definizione di guadagno e fase dal punto di vista dei complessi I

Consideriamo il solito sistema



Scriviamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s+1}{s} \longrightarrow Y(s) = \frac{2s+1}{s}U(s)$$

Ricordiamoci che $s = \sigma + j\omega$, cioè s è numero complesso composto da parte reale σ e parte immaginaria ω.

3 Definizione di guadagno e fase dal punto di vista dei complessi II

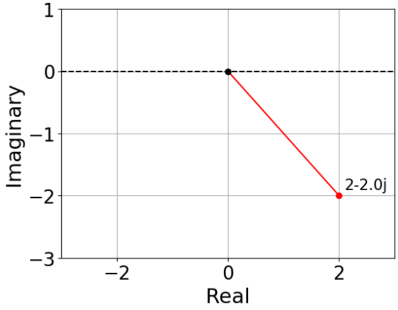
Cosa facciamo?

1. Quando calcoliamo la risposta frequenziale ci interessa la risposta alla stato stazionario (*steady state response*): questo significa che nel complesso s poniamo la parte reale σ uguale a zero
$$\sigma = 0$$
2. Poniamo $s = j\omega$ nella funzione di trasferimento
$$G(s = j\omega) = \frac{2(j\omega)+1}{j\omega} = \frac{2(j\omega)}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} = 2 + \frac{1}{j\omega}\frac{j}{j} = 2 - \frac{j}{\omega} = 2 - \frac{1}{\omega}j$$
Otteniamo un numero complesso con parte reale e immaginaria.

Poniamo $\omega = 0.5$, la frequenza dell'esempio precedente.
$$G(s = j\omega) = 2 - \frac{1}{0.5}j = 2 - 2j$$

Rappresentiamo il punto sul piano cartesiano:

3 Definizione di guadagno e fase dal punto di vista dei complessi III



Affermiamo che:

- il guadagno (*Gain*) è il modulo del numero complesso $\boxed{\text{Gain} = \sqrt{\text{Real}^2 + \text{Imag}^2}}$
- la fase (*Phase*) è l'angolo del numero complesso $\boxed{\angle = \arctan\left(\frac{\text{Imag}}{\text{Real}}\right)}$

3 Definizione di guadagno e fase dal punto di vista dei complessi IV

Cosa succede se studiamo guadagno e fase al variare di ω?

- **Guadagno**. Per quanto riguarda il guadagno consideriamo la formula

$$\text{Gain} = \sqrt{\text{Real}^2 + \text{Imag}^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{\omega^2}}$$

  - Se $\omega \to 0$ il guadagno cresce fino ad essere Inf con $\omega = 0$
  - Se $\omega \to \infty$ il guadagno decresce fino a diventare 2 con $\omega = \text{inf}$

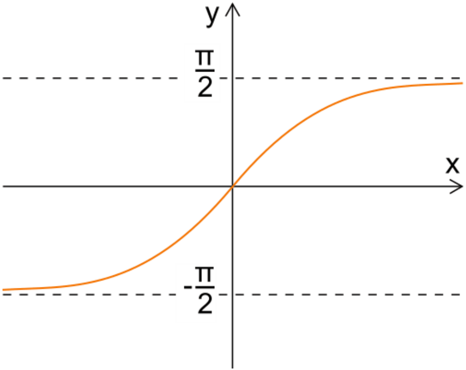
- **Fase**. Per quanto riguarda la fase consideriamo la formula

$$\angle = \arctan\left(\frac{\text{Imag}}{\text{Real}}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{2\omega}\right)$$

  - Se $\omega \to 0$ allora $\frac{\text{Imag}}{\text{Real}} \to \infty$ fino ad avere $-90\,\text{deg}$ con $\omega = 0$
  - Se $\omega \to \infty$ allora $\frac{\text{Imag}}{\text{Real}} \to 0$ fino ad avere $0\,\text{deg}$ con $\omega = \infty$

3 Definizione di guadagno e fase dal punto di vista dei complessi V

Promemoria. Grafico generico dell'arcotangente (ovviamente nel caso nostro tende a $-\frac{\pi}{2}$ e non a $\frac{\pi}{2}$ per il segno negativo presente dentro l'arcotangente)



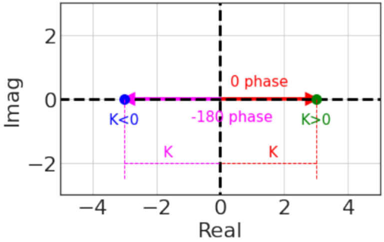
4 Primi esempi di Diagrammi di Bode I

4.1 Diagrammi di una funzione costante

Consideriamo la più semplice funzione di trasferimento $G(s) = K$, dove $K \in \mathbb{R}$.

- Il guadagno è K positivo. $\boxed{\text{Guadagno} = |G(j\omega)| = \sqrt{0^2 + K^2} = |K|}$
- La fase è l'arcotangente. $\boxed{\text{Fase} = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = \arctan(0) = \begin{cases} 0 & \text{Real} > 0 \\ -\pi & \text{Real} < 0 \end{cases}}$

Graficamente otteniamo la seguente rappresentazione (banale, numero puramente reale)

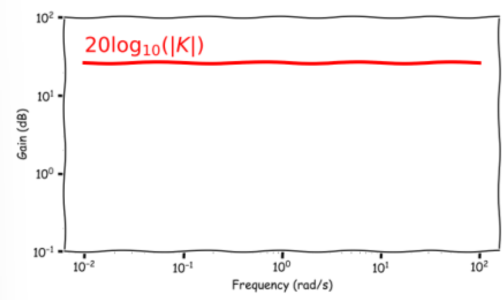


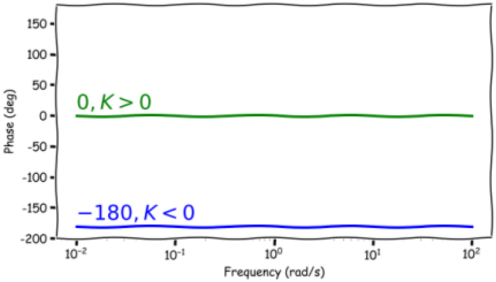
4 Primi esempi di Diagrammi di Bode II

4.1 Diagrammi di una funzione costante

Rappresentiamo il tutto sui diagrammi di Bode

$$\text{Gain} = 20\log_{10}(|G(j\omega)|) = 20\log_{10}|K| \qquad \text{Phase} = \begin{cases} 0\,\text{deg} & \text{Real} > 0 \\ -180\,\text{deg} & \text{Real} < 0 \end{cases}$$

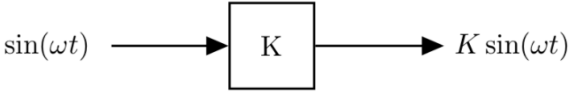




4 Primi esempi di Diagrammi di Bode III

4.1 Diagrammi di una funzione costante

Prendiamo adesso il sistema K (quello appena descritto con Bode) e poniamo in ingresso una funzione $u(t) = \sin(\omega t)$

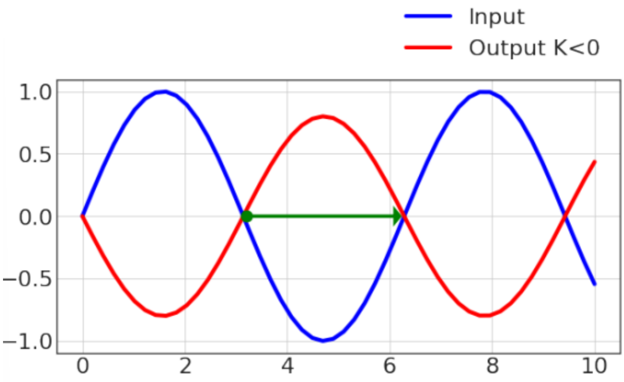


Otteniamo

$$y(t) = A|G(j\omega)|\sin\left[\omega t + \angle G(j\omega))\right] \implies \boxed{y(t) = \begin{cases} |K|\sin(\omega t) = K\sin(\omega t) & K > 0 \\ |K|\sin(\omega t - 180\,\mathrm{deg}) = -K\sin(\omega t) & K < 0 \end{cases}}$$

- L'ampiezza della funzione di ingresso $u(t)$ è $A = 1$
- Il guadagno è $|G(j\omega)| = |K|$
- Sulla fase si deve stare attenti al segno di K. Ricordarsi che $\boxed{\sin(x - \alpha) = -\sin(x)}$

Mettiamo a confronto input e output graficamente, supponendo che $-1 < K < 0$. Otteniamo



4.2 Diagrammi dell'integratore

Consideriamo un particolare sistema: l'*integratore*, cioè un sistema che dato in ingresso un segnale restituisce in uscita l'integrale del segnale (lo abbiamo già visto nell'esempio introduttivo del capitolo). Abbiamo visto dalle proprietà della trasformata di Laplace che

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Questo significa che un sistema integratore avrà come funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s}$.
Poniamo $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega}j$$

$$\boxed{\text{Guadagno} = |G(j\omega)| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega}}$$

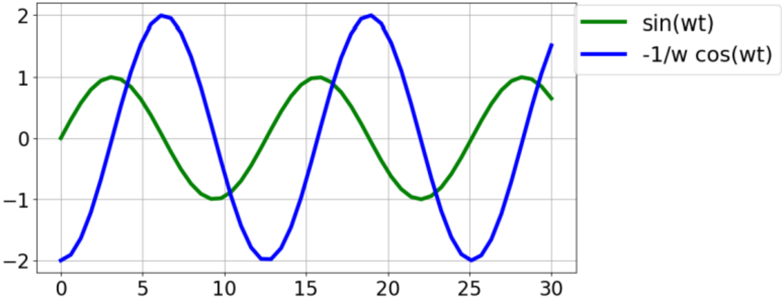
$$\boxed{\text{Fase} = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{0}\right) \longrightarrow -\frac{\pi}{2}}$$

4.2 Diagrammi dell'integratore

Prendiamo il sistema integratore e poniamo in ingresso una funzione $u(t) = \sin(\omega t)$.

$$y(t) = A|G(j\omega)|\sin\left[\omega t + \angle G(j\omega)\right] \Longrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)}$$

ricordando che $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$. $A = 1, |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}|, \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$.

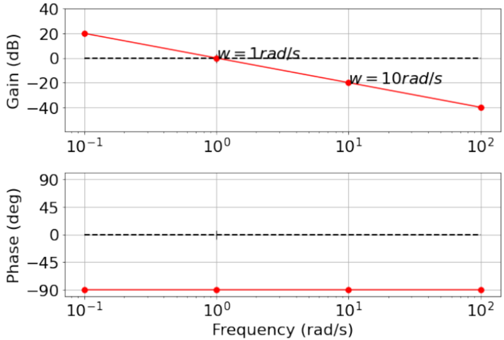


4 Primi esempi di Diagrammi di Bode III

4.2 Diagrammi dell'integratore

Disegniamo i diagrammi di Bode: ricordarsi la scala logaritmica!

$$\text{Gain} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\omega} \right) \qquad\qquad \text{Phase} = -90 \deg$$



5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano I

5.1 Il trucchetto

Vogliamo disegnare i diagrammi di Bode a mano: possibile farlo anche con funzioni non particolarmente semplici? Consideriamo le seguenti funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{5}{s} \qquad\qquad G_2(s) = \frac{3}{s^2}$$

Scomponiamo le due funzioni di trasferimento nel seguente modo

$$G_1(s) = \frac{5}{s} = 5 \cdot \frac{1}{s} \qquad\qquad G_2(s) = \frac{3}{s^2} = 3 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}$$

Grazie alle proprietà dei logaritmi possiamo lavorare sulle singole risposte e infine sommarle! La cosa ci piace: basta scomporre le funzioni di trasferimento in funzioni di cui conosciamo la risposta in termini di Bode.

Macro-passaggi per disegnare i grafici

1. Prima si disegnano le singole risposte.
2. Disegnate le singole risposte le si sommano per ottenere il diagramma di Bode della funzione di trasferimento da noi considerata.

Un altro esempio possiamo farlo con la funzione di trasferimento $G_3(s) = s$, che possiamo scrivere nella seguente forma

$$G_3(s) = s = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)}$$

Grazie alle proprietà dei logaritmi possiamo gestire la cosa come la differenza tra la risposta alla costante 1 (che abbiamo visto) e la risposta all'integratore $\frac{1}{s}$ (anche questo visto).

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano III

5.1 Il trucchetto

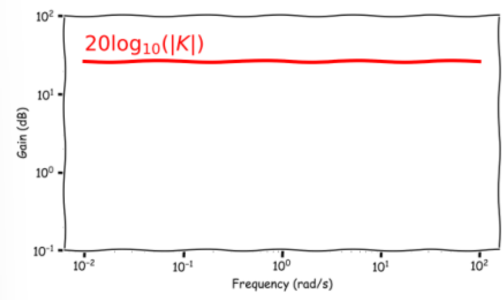
Cosa ci serve?

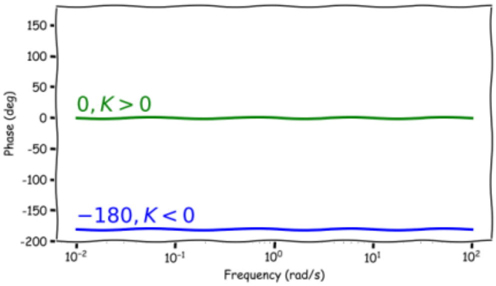
Introdurre tutte le possibili casistiche!

1. costanti
2. poli all'origine
3. zeri all'origine
4. poli reali
5. zeri reali
6. zeri e poli complessi

Poco da dire: abbiamo già visto tutto quando abbiamo affrontato il primo esempio di diagrammi di Bode!

$$G(s) = K, K \in \mathbb{R}$$





Caso K = 1. Ovviamente con $K = 1$ abbiamo Gain $= 20\log_{10}(1) = 0$ e Phase $= \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = \arctan(0) = 0$. Contributi nullo sia in termini di guadagno che di fase.

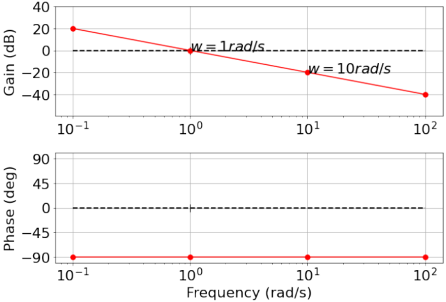
5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano I

5.3 Seconda casistica: poli all'origine

Consideriamo una funzione del tipo

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Un polo all'origine: l'integratore! Conosciamo di già i corrispondenti diagrammi di Bode



5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano I

5.4 Terza casistica: zeri all'origine

Consideriamo una funzione del tipo

$$G(s) = s$$

Uno zero all'origine! Quali sono i diagrammi di Bode?

- Abbiamo già anticipato che è possibile sfruttare le proprietà dei logaritmi, ottenendo che la risposta frequenziale è la differenza tra due risposte

$$s = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)} \Longrightarrow 1 - \frac{1}{s}$$

- Ma noi abbiamo già visto queste due risposte!
  - **1**. La prima casistica: quella delle costanti con $K = 1$.
    - Il guadagno in dB è nullo poichè $20 \log_{10}(1) = 0$,
    - Il *phase shift* è uguale a 0 dato che non abbiamo parte reale negativa!

- $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}$. Poli nell'origine: l'integratore! Abbiamo già visto *gain* e *phase shift*

$$\text{Gain} = 20\log_{10}(|G(j\omega)|) = 20\log_{10}\left(\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{\omega}\right)^2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$\text{Phase shift} = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{0}\right) \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Ricordarsi che i diagrammi di Bode, per questo caso, si ottengono con la differenza tra una risposta che abbiamo detto esprimere contributo nullo in guadagno e *phase shift* e la risposta dell'integratore.

- Il *gain* sarà quello dell'integratore, ma di segno opposto

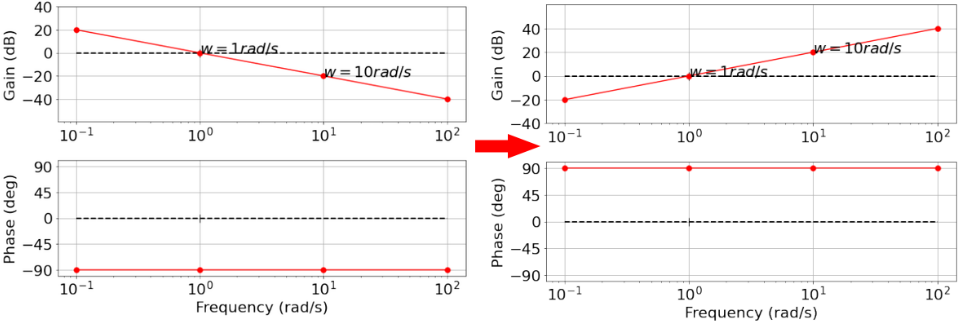
$$0 - 20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano III

5.4 Terza casistica: zeri all'origine

- Il *phase shift* sarà quello dell'integratore, ma di segno opposto

$$0 - (-90\,\text{deg}) = +90\,\text{deg}$$



5.5 Quarta casistica: poli reali

Consideriamo una funzione del tipo

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

Abbiamo un polo reale, che è $s = -a$. Possiamo rappresentare la funzione nella seguente forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$

dove ω_0 è la cosiddetta *break frequency*. Poniamo $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

La parte reale è $\dfrac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$, mentre la parte immaginaria è $\dfrac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano II

5.5 Quarta casistica: poli reali

Calcoliamo *gain* e *phase shift*

$$\text{Gain} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}(\dots) \longrightarrow \text{Gain} = 20\log_{10}\left[\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\right] = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)^2+\left(\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}+\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}$$

$$\text{Phase shift} = \arctan\left(\frac{\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\frac{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

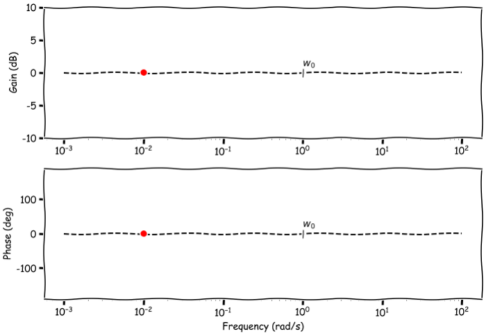
Calcoli antipatici. Ci serve una strategia per disegnare al volo i diagrammi di Bode.
Osserviamo l'andamento della funzione al variare di ω, prendendo a riferimento ω_0:

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano III

5.5 Quarta casistica: poli reali

- Se $\omega << \omega_0$ allora $\frac{\omega}{\omega_0} \to 0$: guadagno e fase sono praticamente nulli.

$$\text{Gain} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \to \sqrt{1}\right) = -20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB} \qquad \text{Phase shift} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0} \to 0\right) = 0\,\text{deg}$$

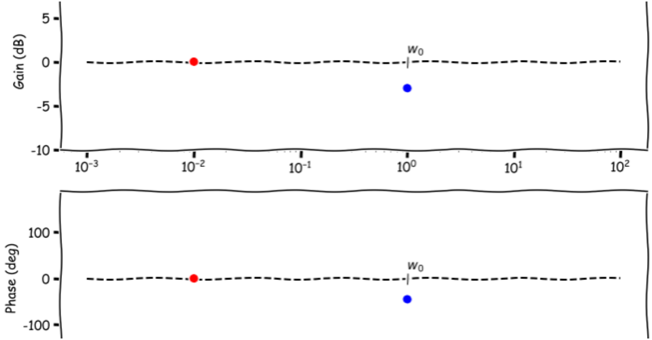


5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano IV

5.5 Quarta casistica: poli reali

- Se $\omega = \omega_0$ allora $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$. Otteniamo un guadagno ≈ -3.01 e una fase pari a $-45\,\text{deg}$

$$\text{Gain} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \to \sqrt{2}\right) \qquad \text{Phase shift} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0} \to -1\right) = -45\,\text{deg}$$

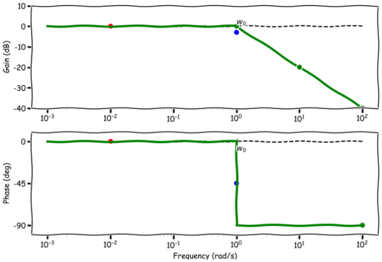


5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano V

5.5 Quarta casistica: poli reali

- Se $\omega >> \omega_0$ allora $\frac{\omega}{\omega_0} \to \infty$ (molto grande). Il rapporto domina nelle equazioni: guadagno assume andamento lineare ($-20\,\text{db/decade}$) e la phase assume valore $-90\,\text{deg}$

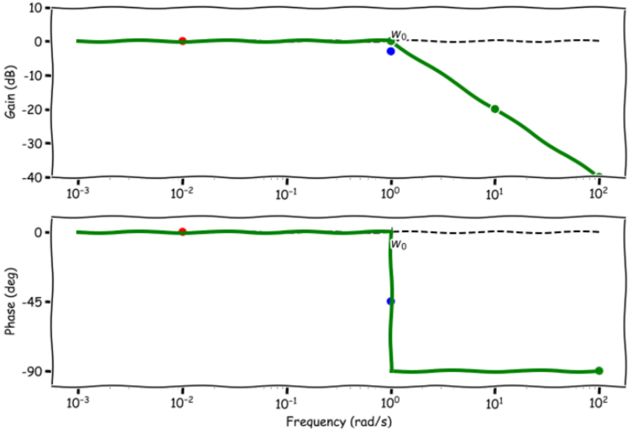
$$\text{Gain} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \to \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{Phase shift} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -90\,\text{deg}$$



5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano VI

5.5 Quarta casistica: poli reali

Otteniamo complessivamente la seguente rappresentazione grafica:



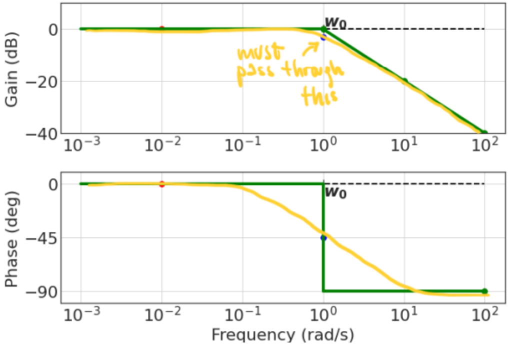
5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano VII

5.5 Quarta casistica: poli reali

Attenzione all'approssimazione. Il disegno precedente è un'*approssimazione asintotica* degli effettivi diagrammi di Bode. Rendiamo più precisi i grafici considerando che:

- in ω_0 non si ha guadagno nullo, ma guadagno ≈ -3.01
- la fase non varia istantaneamente, introduciamo una variazione progressiva nel range $[0.1 \cdot \omega_0; 10 \cdot \omega_0]$

La curva in giallo è molto più precisa!



Consideriamo una funzione del tipo

$$G(s) = s + z = \frac{s}{\omega_0} + 1$$

Quello che facciamo è porre la funzione nella seguente forma

$$G_2(s) = s + z = \frac{1}{\frac{1}{s+z}} = \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}}} \Longrightarrow 1 + \frac{s}{\omega_0}$$

Sostituiamo $s = j\omega \Longrightarrow 1 + \frac{s}{\omega_0} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$.

Dove stanno le differenze, graficamente parlando, rispetto al caso dei poli reali?

- **Diagramma del guadagno**.
  - Il grafico è inizialmente lo stesso (0 per $\omega << \omega_0$)
  - In $\omega = \omega_0$ si ha un valore ≈ 3.01, uguale al caso dei poli reali ma cambiato di segno.
  - Per valori $\omega > \omega_0$ si traccia una retta che va verso l'alto e non verso il basso. Pendenza di $20\,\text{db}/\text{decade}$ e non $-20\,\text{db}/\text{decade}$
- **Diagramma della fase**.
  - Per valori $\omega << \omega_0$ abbiamo $\angle = 0$ come prima.
  - In $\omega = \omega_0$ si ha $\angle = 45\,\text{deg}$ e non $\angle = -45\,\text{deg}$.
  - Per valori $\omega >> \omega_0$ avremo $\angle = 90\,\text{deg}$ e non $\angle = -90\,\text{deg}$

Vale lo stesso discorso fatto prima sull'*approssimazione asintotica* e sulle strategie per ottenere diagrammi maggiormente precisi.

Consideriamo una funzione di trasferimento nella seguente forma

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Forma che abbiamo già visto precedentemente! Il coefficiente di smorzamento ζ risulta avere un valore $0 < \zeta < 1$ dato che l'equazione $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ restituisce due complessi coniugati

$$s = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Come al solito dobbiamo porre la funzione di trasferimento nella forma di Bode

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta\frac{\omega_0}{\omega_0^2}s + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\zeta}{\omega_0}s + 1}$$

Personalmente trovo antipatico il ricondurre un'equazione di secondo grado alla forma di Bode. Prendo il seguente esempio

$$\frac{s^2+2s+64}{s^2(s+0.5)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+0.5}\cdot(s^2+2s+64)$$

Prendiamo $s^2+2s+64$, che ha $\Delta<0$: come trovo ζ e ω_0? Si raccoglie

$$s^2+2s+64 = 64\left(\frac{s^2}{64}+\frac{2}{64}s+1\right) = 8^2\left(\frac{s^2}{8^2}+2\frac{1}{8^2}s+1\right)$$

In merito al secondo termine troviamo che $\zeta=\frac{1}{8}$ e $\omega_0=8$ con i seguenti passaggi matematici, ricordando che $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

$$2\frac{1}{8^2} = 2\frac{1}{8}\frac{1}{8} = 2\frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{8}$$

Poniamo $s = j\omega$ per distinguere parte reale da parte immaginaria

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{1}{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1\right) + j\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \cdot \frac{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1\right) - j\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1\right) - j\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1\right) - j\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} + j\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}$$

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} \qquad \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}$$

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano IV

5.7 Quinta casistica: poli complessi

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}\right)^2+\left(\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left(\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}\right)$$

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano V

5.7 Quinta casistica: poli complessi

Per quanto riguarda $\angle G(j\omega)$, invece, otteniamo il seguente risultato

$$\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}{\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

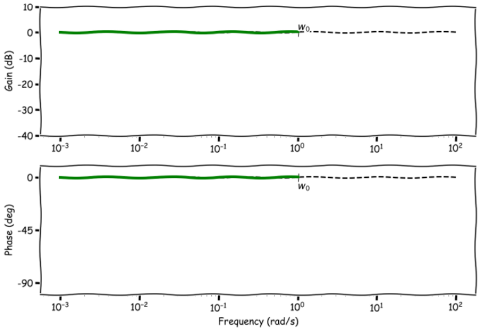
Come prima andiamo a considerare le tre situazioni in cui può trovarsi il valore ω rispetto ad ω_0: per ogni caso indichiamo modulo e fase.

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano VI

5.7 Quinta casistica: poli complessi

- Se $\omega << \omega_0$ allora $\frac{\omega}{\omega_0}$ è molto piccolo. Osserviamo che

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}(\sqrt{1}) = 0 \qquad \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = \arctan(0) = 0\,\text{deg}$$



5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano VII

5.7 Quinta casistica: poli complessi

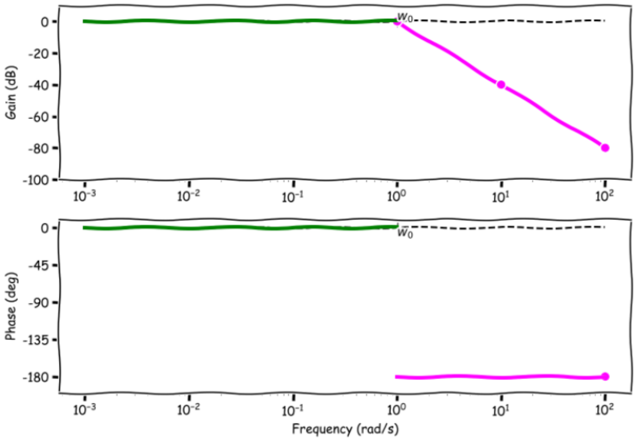
- Se $\omega >> \omega_0$ allora $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ (espressione presente sia nella parte reale che in quella immaginaria)

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left[\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}\right] = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = -180\,\mathrm{deg}$$

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano VIII

5.7 Quinta casistica: poli complessi



5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano IX

5.7 Quinta casistica: poli complessi

- Se $\omega = \omega_0$ allora $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$. Otteniamo una semplificazione drastica delle formule

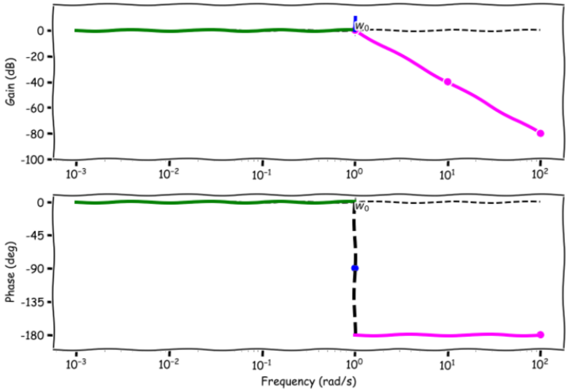
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left(\sqrt{(2\zeta)^2}\right) = -20\log_{10}(2\zeta)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{-2\zeta}{0}\right) = -90\,\text{deg}$$

  - **Riflessioni sul guadagno**.
    Il guadagno assunto con $\omega = \omega_0$ dipende chiaramente dal *dumping ratio* ζ. Osserviamo che (figura di esempio con $\zeta = 0.3$):
    - ★ se $\zeta = 0.5 \longrightarrow -20\log(1) = 0\,\text{dB}$
    - ★ se $\zeta > 0.5 \longrightarrow$ si assume un valore < 0
    - ★ se $\zeta < 0.5 \longrightarrow$ si assume valore > 0 [**Sottocaso**: se $\zeta = 0 \longrightarrow$ il picco va a infinito]

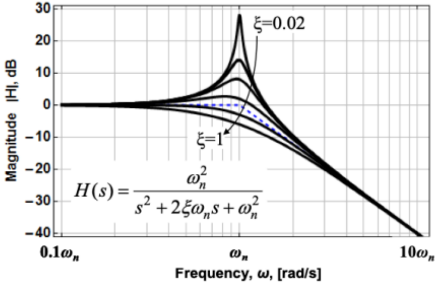
5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano X

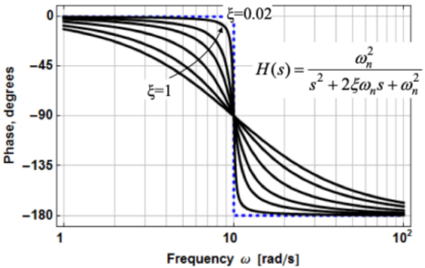
5.7 Quinta casistica: poli complessi



- **Riflessioni sulla fase.**
  La fase ha come valore -90 deg dato che abbiamo ottenuto nei passi precedenti un numero puramente immaginario, con parte immaginaria negativa.

Attenzione all'approssimazione. Anche qua il disegno ottenuto è un'*approssimazione asintotica* degli effettivi diagrammi di Bode. Dobbiamo considerare, sia per il guadagno che per la fase, il valore assunto dal *dumping ratio* ζ.



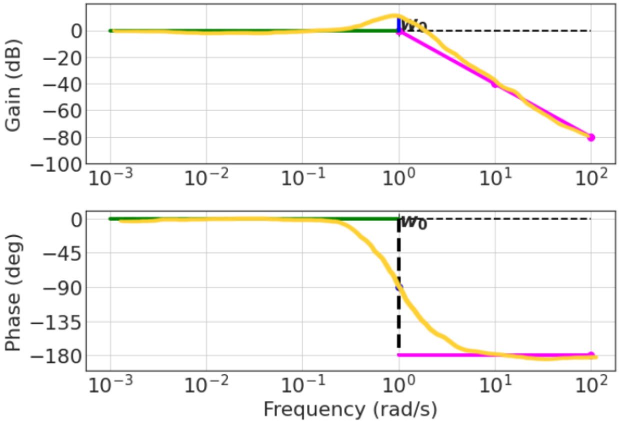


I concetti sono gli stessi già visti per il caso con poli reali, dobbiamo solo stare attenti a ζ.

5 Disegnare i diagrammi di Bode a mano XII

5.7 Quinta casistica: poli complessi

Se riprendiamo l'esempio visto due diapositive fa con $\zeta = 3$ otteniamo la curva gialla, che è sicuramente più precisa.



6 Esercizi tipici dell'esame

Raccogliamo quanto seminato

Svolgiamo degli esercizi in linea con quanto viene richiesto all'esame.

Ricordarsi che il tempo all'esame non è molto, necessaria velocità!

6 Esercizi tipici dell'esame I

6.1 Primo esempio

Consegna

Si richiede di disegnare il diagramma di Bode del seguente sistema

$$G(s) = \frac{10^3(s+0.1)}{s(s+1)^2}$$

Manipoliamo la funzione di trasferimento per ottenere termini riconducibili ai casi tipici, di cui sappiamo disegnare i relativi diagrammi di Bode

$$G(s) = 10^3 \cdot (s+0.1) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = [10^3 \cdot 0.1] \cdot \left(\frac{s}{0.1}+1\right) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$$

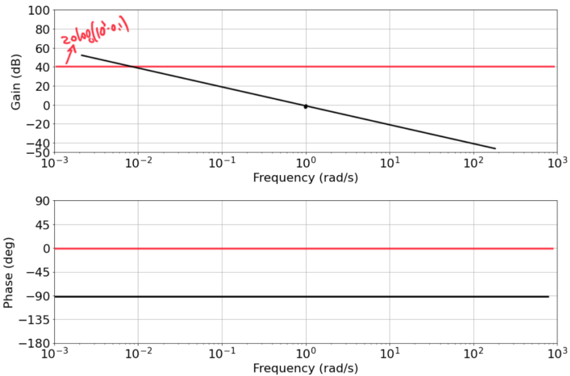
- **Costante** $10^3 \cdot 0.1$. Diagrammi di Bode di una costante $K = 10^3 \cdot 0.1 = 10^2$.

$$\text{Gain}_{dB} = 20\log_{10}(|10^3 \cdot 0.1|) = 40 \qquad \text{Phase} = 0 \;\; (\text{Numero positivo})$$

6 Esercizi tipici dell'esame II

6.1 Primo esempio

- **Funzione integratore** $\frac{1}{s}$. Abbiamo un polo all'origine.
  - Il guadagno è lineare in scala logaritmica. Ricordarsi due valori: 0 ($\omega = 10^0$) e 20 ($\omega = 10^{-1}$)
  - La fase è $-90\,\mathrm{deg}$



6 Esercizi tipici dell'esame III

6.1 Primo esempio

- **Funzione** $(s + 0.1)$. Abbiamo uno zero $s = -0.1$.
  Raccogliamo per ottenere $\omega_0 = 0.1 = 10^{-1}$

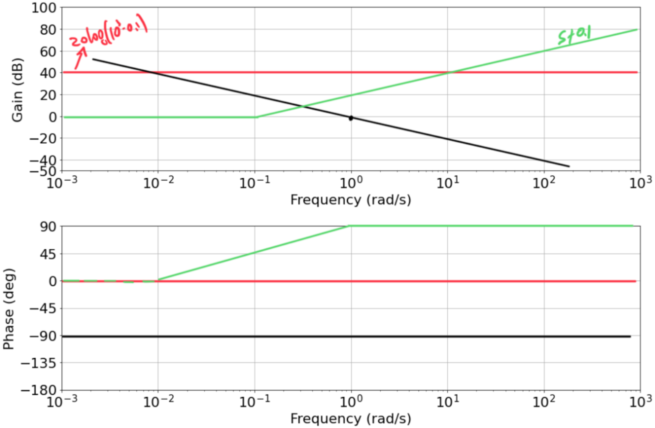
$$(s + 0.1) = \frac{s}{0.1} + 1 \qquad \boxed{\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

  Tracciamo una curva del guadagno con i seguenti valori
  - guadagno nullo per tutte le frequenza $\omega \leq \omega_0 = 10^{-1}$
  - retta con andamento lineare diretta verso l'alto a partire da $\omega_0 = 10^{-1}$, passante da 0 per $\omega = 10^{-1}$ e 20 per $\omega = 10^0$

  Per quanto riguarda la fase abbiamo gli stessi valori tipici della funzione con polo reale, ma cambiati di segno: 45 deg in ω_0 (invece di -45 deg) e 90 deg per $\omega > \omega_0$ (invece di -90 deg).

6 Esercizi tipici dell'esame IV

6.1 Primo esempio

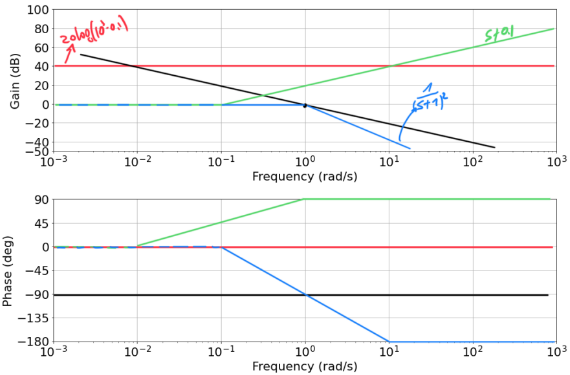


- **Funzione** $\frac{1}{(s+1)^2}$. Abbiamo un polo $s = -1$ con molteplicità 2.

6 Esercizi tipici dell'esame V

6.1 Primo esempio

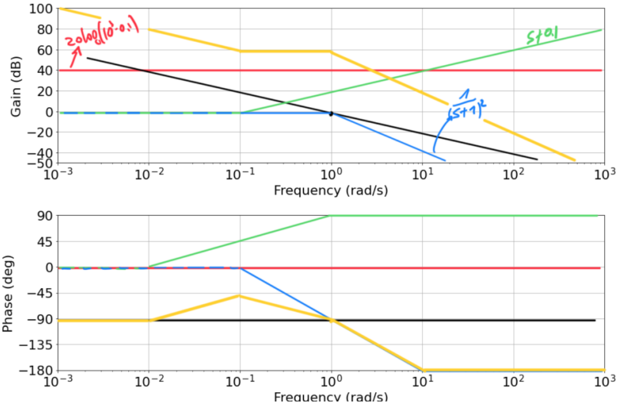
- Per quanto riguarda il guadagno si rappresenta come se fosse una funzione $\frac{1}{s+a}$, ma nel tratto con andamento lineare si ha pendenza raddoppiata.
- Per quanto riguarda la fase si rappresenta come se fosse una funzione $\frac{1}{s+a}$, ma si avrà fase raddoppiata per $\omega = \omega_0$ ($-90\,\text{deg}$ invece di $-45\,\text{deg}$) e $\omega > \omega_0$ ($-180\,\text{deg}$ invece di $-90\,\text{deg}$)



6 Esercizi tipici dell'esame VI

6.1 Primo esempio

Quanto detto equivale a trattare questa funzione come $\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1}$ (due funzioni diverse). Sommando tutti i contributi otteniamo le curve di color senape



Consegna

Si richiede di disegnare il diagramma di Bode del seguente sistema

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+0.1)(s-1)}$$

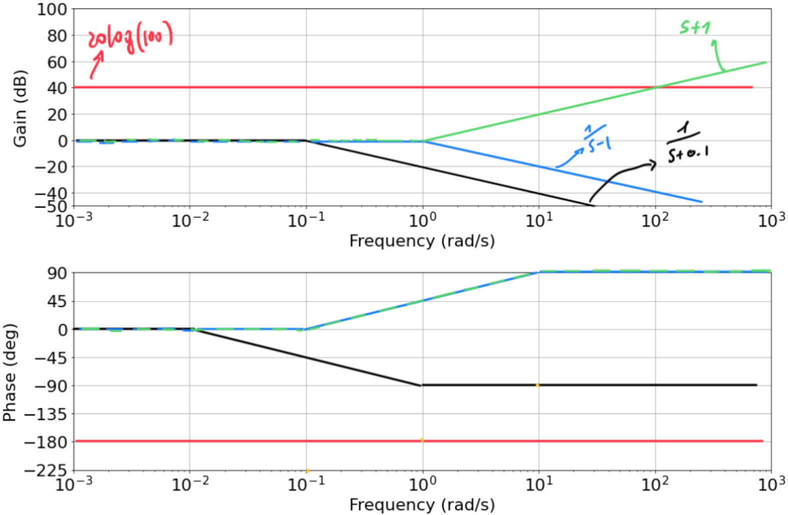
Manipoliamo la funzione di trasferimento per ottenere termini riconducibili ai casi tipici, di cui sappiamo disegnare i relativi diagrammi di Bode

$$\begin{aligned} G(s) = 10 \cdot (s+1) \cdot \frac{1}{(s+0.1)} \cdot \frac{1}{(s-1)} &= \left[10 \cdot \frac{1}{0.1} \cdot \frac{1}{-1}\right] \cdot (s+1) \cdot \frac{1}{\frac{s}{0.1}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{-1}+1} \\ &= -100 \cdot (s+1) \cdot \frac{1}{\frac{s}{0.1}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{-1}+1} \end{aligned}$$

- Soffermiamoci sulla funzione $\dfrac{1}{\frac{s}{-1}+1}$: abbiamo $\omega_0 = -1$!! Come ci muoviamo?
  - Il diagramma del guadagno non cambia, è come se avessi $\omega_0 = 1$.
  - Il diagramma della fase si ribalta:
    - ★ inizialmente si ha 0 deg per $\omega < \omega_0$
    - ★ si assume 45 deg per $\omega = \omega_0$
    - ★ su assume 90 deg per $\omega > \omega_0$
- Occhio alla costante $K = -100$: ricordarsi che la fase è -180 deg (costante di valore negativo).

6 Esercizi tipici dell'esame III

6.2 Secondo esempio



6 Esercizi tipici dell'esame IV

6.2 Secondo esempio

Dalla somma dei contributi otteniamo le curve di color senape