

Fondamenti di Automatica

Diagramma di Nyquist

Gabriele Frassi

Studente del corso di laurea triennale in *Ingegneria Informatica*

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)
Università di Pisa

A.A.2022-2023

Indice

Appunti personali di Fondamenti di Automatica riguardo il diagramma di Nyquist. La parte teorica si basa sul materiale del prof. Munafò, ma si propone un metodo di disegno che va oltre tale materiale.

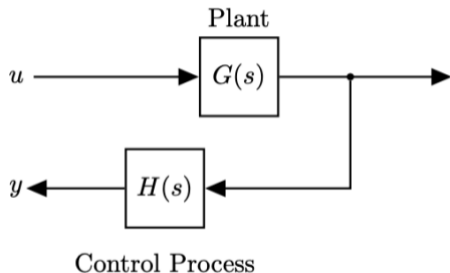
Se questi appunti sono stati utili e vuoi ringraziarmi in qualche modo:

<https://www.paypal.com/paypalme/GabrieleFrassi>

1	Perchè ne parliamo? <i>open loop vs closed loop</i>	3
2	Principio dell'argomento di Cauchy	8
3	Diagramma di Nyquist	15
	• Teoria	15
	• Disegno a mano	22
	• Poli lungo l'asse immaginario	33
	• Zeri lungo l'asse immaginario	42
4	Esempi di diagrammi di Nyquist	43
	• Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0	43
	• Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1	50
	• Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1	57

1 Perché ne parliamo? *open loop vs closed loop* I

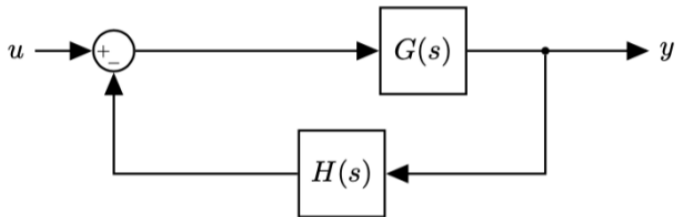
Consideriamo un tipico sistema di controllo ad anello aperto, con impianto $G(s)$ e controllore $H(s)$ (quello su cui lavoriamo)



Conosciamo sia $G(s)$ che $H(s)$, la funzione di trasferimento del sistema è $G(s)H(s)$.

1 Perché ne parliamo? *open loop vs closed loop* II

Cosa succede se chiudiamo l'anello?



Cambia la funzione di trasferimento!

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

A questo punto distinguiamo i due casi: come verifico la stabilità del sistema?

1 Perché ne parliamo? *open loop vs closed loop* III

- **open loop case.**

Caso non diverso dai precedenti. Si analizzano i poli della funzione di trasferimento

$$G(s)H(s)$$

Se emergono poli la cui parte reale è $\text{Re} > 0$ allora il sistema è instabile.

- **closed loop case.**

La funzione di trasferimento è la seguente

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Trovare i poli della funzione significa trovare le radici dell'equazione $1 + G(s)H(s) = 0$, cioè gli zeri dell'equazione $1 + G(s)H(s) = 0$. Se le radici hanno parte reale $\text{Re} > 0$ allora il sistema è instabile.

1 Perché ne parliamo? *open loop vs closed loop* IV

La prima cosa che ci viene in mente è che potremo individuare le radici dell'equazione $1 + G(s)H(s) = 0$ partendo dall'equazione $G(s)H(s) = 0$. Il problema è l'assenza di una chiara relazione tra zeri e poli delle due equazioni. Prendiamo ad esempio la seguente funzione di trasferimento

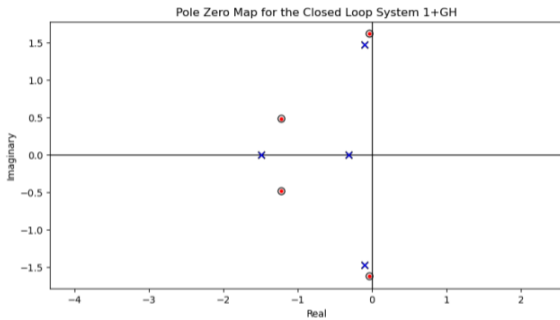
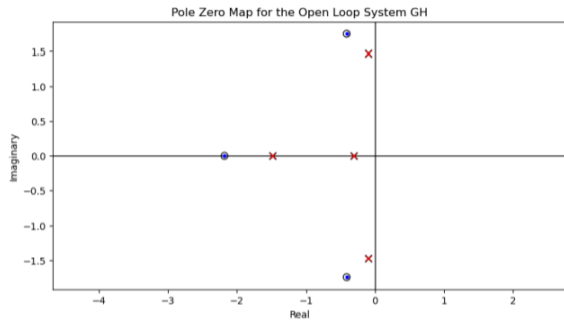
$$G(s)H(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 5s + 7}{2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 8s + 2}$$

Nella figura della diapositiva successiva consideriamo:

- A sinistra guardiamo zeri e poli di $G(s)H(s)$
- A destra consideriamo zeri e poli di $1 + G(s)H(s)$

Osserviamo che non vi è una chiara relazione tra gli zeri di $G(s)H(s)$ (*open loop*) e gli zeri di $1 + G(s)H(s)$ (*closed loop*), mentre i poli delle due equazioni sono gli stessi (lo dimostreremo più avanti).

1 Perché ne parliamo? *open loop vs closed loop* V



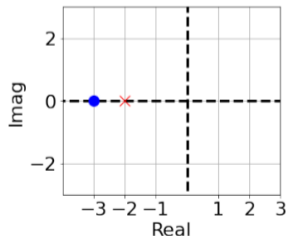
Ci servono nuovi strumenti: introduciamo Nyquist.

2 Principio dell'argomento di Cauchy I

Prima di introdurre Nyquist è necessario discutere del *principio dell'argomento di Cauchy*. Consideriamo una semplice funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 3}{s + 2}$$

Essa presenta come unico polo $s = -2$ e come unico zero $s = -3$. Rappresentiamoli nel piano di s (dominio di $G(s)$)

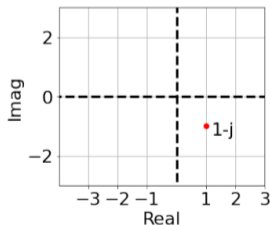


2 Principio dell'argomento di Cauchy II

Lo zero è il pallino blu, il polo è la X rossa. Se noi poniamo in $G(s)$ un particolare numero complesso andremo ad ottenere un altro numero complesso appartenente al codominio Ω . Poniamo, giusto per rendere l'idea, $G(s = -2 + j)$

$$G(s = -2 + j) = \frac{(-2 + j) + 3}{(-2 + j) + 2} = \frac{1 + j}{j} = \frac{1 + j - j}{j - j} = 1 - j$$

Rappresentiamo nel piano di Ω



2 Principio dell'argomento di Cauchy III

Vogliamo capire la relazione tra i punti del piano di s e i punti del piano di Ω .

- Se con i punti di s rappresentiamo una curva chiusa allora otterremo una curva chiusa con i punti corrispondenti del piano di Ω .
- Ogni punto delle due curve può essere rappresentato come un fasore caratterizzato da modulo e fase.
- La curva ottenuta nel piano di Ω contiene informazioni su modulo e fase degli zeri e i poli.

Cosa facciamo?

- ▶ Scegliamo il punto del piano di s che vogliamo mappare nel piano di Ω .
- ▶ Disegniamo i fasori che dagli zeri e i poli vanno al punto del piano di s .
- ▶ Consideriamo moduli e fasi dei fasori disegnati per ottenere modulo e fase del punto nel piano di Ω

★ **Modulo.**

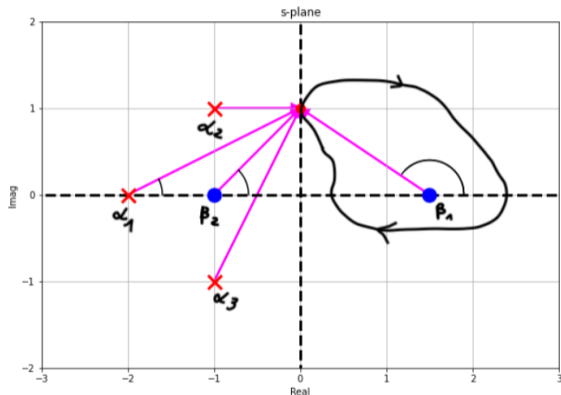
Il modulo consiste nel prodotto tra i moduli dei fasori relativi agli zeri, fratto il prodotto dei moduli relativi ai poli.

$$\frac{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots}$$

2 Principio dell'argomento di Cauchy IV

★ Fase.

La fase consiste nella somma algebrica delle fasi relative a zeri e poli, dove le fasi relative agli zeri hanno segno positivo e quelle relative ai poli segno negativo.



2 Principio dell'argomento di Cauchy V

Percorriamo la curva chiusa nella figura della diapositiva precedente: quali sono i contributi dei vari zeri e poli in termini di angolo?

Convenzione

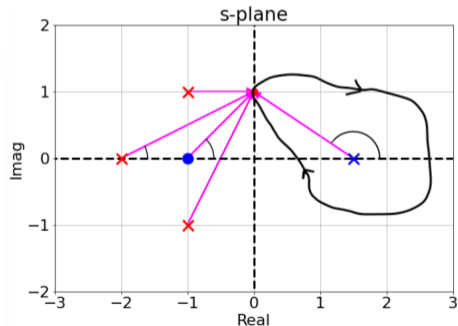
La curva chiusa viene sempre percorsa in senso orario. Attenzione, ricordarsi cosa significa avere un angolo di segno positivo e un angolo di segno negativo all'interno di un piano cartesiano.

- Lo zero β_1 contribuisce -2π (immaginarsi il fasore che compie una rotazione di 360 gradi mentre percorriamo la curva chiusa)
- Quanto detto per lo zero β_1 vale
 - ▶ per qualunque zero posto all'interno della curva chiusa;
 - ▶ per quanto riguarda i poli posti all'interno della curva chiusa vediamo più avanti.
- Lo zero β_2 contribuisce 0 (anche qua immaginarsi il movimento del fasore mentre percorriamo la curva chiusa, scende verso il basso e poi ritorna in alto al punto di partenza)

2 Principio dell'argomento di Cauchy VI

- Quanto detto per lo zero β_2 vale:
 - ▶ per qualunque zero posto all'esterno della curva chiusa;
 - ▶ per qualunque polo posto all'esterno della curva chiusa

Adesso supponiamo che all'interno della curva chiusa sia presente un polo e non uno zero: cosa succede?



2 Principio dell'argomento di Cauchy VII

- Come prima si ha un contributo di -2π .
- Contrariamente a prima si deve ricordare che la fase *consiste nella somma delle fasi relative agli zeri, meno le fasi relative ai poli*: questo significa che l'angolo totale non è -2π , ma 2π !

Con queste riflessioni possiamo introdurre il *principio dell'argomento di Cauchy*, che sarà utile per i diagrammi di Nyquist

Principio dell'argomento di Cauchy

Il numero di rotazioni attorno all'origine del piano di Ω restituisce la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri racchiusi dalla curva chiusa del piano di s .

3 Diagramma di Nyquist I

3.1 Teoria

Chiarito il *principio dell'argomento di Cauchy* possiamo introdurre il *diagramma di Nyquist*.

Vogliamo determinare la stabilità del sistema, il che passa dall'individuazione dei poli della funzione di trasferimento $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$, cioè gli zeri di $1 + G(s)H(s)$.

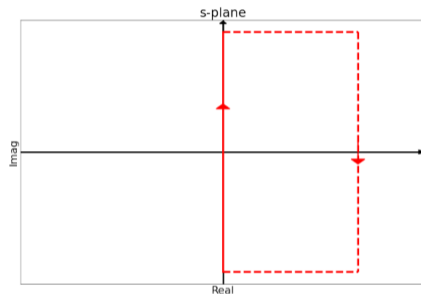
$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \implies \boxed{1 + G(s)H(s) = 0}$$

Dobbiamo capire se esistono zeri nel *right half plane* (cioè se ci sono poli che hanno parte reale $\text{Re} > 0$): in quel caso otterremo che il sistema è instabile.

3 Diagramma di Nyquist II

3.1 Teoria

- Tracciamo nel piano di s una curva chiusa che copre l'intero *right half plane*



La curva in questione è detta *curva di Nyquist*: si parte dall'origine e ci si muove fino a $+j\omega$, successivamente ci si muove fino a ∞ per coprire l'intero RHP, ci si muove a $-j\omega$ e infine si ritorna presso l'origine.

- La corrispondente curva chiusa nel piano di Ω è il **diagramma di Nyquist!**

3 Diagramma di Nyquist III

3.1 Teoria

- Quello che facciamo è utilizzare il principio dell'argomento di Cauchy per capire quanti zeri e quanti poli dell'equazione $1 + G(s)H(s)$ sono presenti all'interno della curva di Nyquist, e quindi presenti all'interno del *right half plane*.
 - ▶ Si considera la funzione di trasferimento *open loop* $G(s)H(s)$
 - ▶ Si disegna il diagramma di Nyquist di $G(s)H(s)$
 - ▶ Si conta il numero di rotazioni attorno al punto -1 (non il numero di rotazioni attorno all'origine), ottenendo così la differenza tra numero di poli e numero di zeri (ai sensi del principio dell'argomento di Cauchy)
 - ▶ Si determina il numero di poli e zeri all'interno della curva di Nyquist.
- Come possiamo determinare il numero di zeri nel *right half plane* se conosciamo solo la differenza tra numero di poli e numero di zeri?
 - ▶ Dobbiamo conoscere quanti poli abbiamo nel *right half plane*:
 - ▶ La cosa non è difficile, tipicamente lo sappiamo perchè sono gli stessi del sistema *open loop* $G(s)H(s)$.

3 Diagramma di Nyquist IV

3.1 Teoria

- Dimostriamo l'ultima cosa detta.

- ▶ Sappiamo che le due funzioni $G(s)$ e $H(s)$ possono essere descritte come un rapporto tra polinomi, quindi

$$G(s)H(s) = \frac{N_G}{D_G} \frac{N_H}{D_H}$$

Da cui $\text{Poli} \{G(s)H(s)\} = \text{Zeri} \{D_G D_H\}$

- ▶ Poniamo $1 + G(s)H(s)$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G}{D_G} \frac{N_H}{D_H} = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H}$$

Da cui $\text{Poli} \{1 + G(s)H(s)\} = \text{Zeri} \{D_G D_H\}$

- ▶ Ma quindi

$$\boxed{\text{Poli} \{G(s)H(s)\} = \text{Poli} \{1 + G(s)H(s)\}}$$

3 Diagramma di Nyquist V

3.1 Teoria

Introduciamo l'equazione di Nyquist $Z = N + P$ dove

- Z è il numero di zeri presenti nel *right half plane* (o di zeri nel caso di *closed loop*)
- N è il numero di rotazioni attorno a -1
- P è il numero di poli nel *right half plane*, uguale al numero di poli in *right half plane* del sistema *open loop*.

Quindi: conoscendo il numero di poli in RHP in open loop e disegnando il diagramma di Nyquist siamo in grado

- **Cosa succede con sistema open loop stabile?**

Se il sistema in *open loop* è stabile allora $P = 0$. Questo significa che

$$Z = N + P \longrightarrow Z = N$$

Si ha un sistema *closed loop* stabile solo se non si hanno rotazioni attorno a -1 .

3 Diagramma di Nyquist VI

3.1 Teoria

- **Cosa succede con sistema open loop instabile?**

In questo caso $P \neq 0$. L'unico modo per avere $Z = 0$ è porre

$$Z = N + P \longrightarrow 0 = N + P \longrightarrow \boxed{N = -P}$$

Cioè affermare che per avere stabilità è necessario avere un numero di rotazioni antiorarie attorno a -1 pari al numero di poli nel RHP.

Perchè ci piace quanto introdotto?

- Con i diagrammi di Bode possiamo analizzare la stabilità di un sistema *closed loop* solo se il sistema *open loop* è stabile.
- Con i diagrammi di Nyquist possiamo analizzare la stabilità di un sistema *closed loop* anche quando il sistema *open loop* è instabile.

3 Diagramma di Nyquist VII

3.1 Teoria

Conclusioni: criterio di stabilità di Nyquist

Data la *open loop function* $G(s)H(s)$ vogliamo determinare se il sistema *closed loop* è asintoticamente stabile!

- Per prima cosa verifichiamo se il sistema *open loop* è asintoticamente stabile (poli tutti con parte reale negativa)
- Se il sistema *open loop* è asintoticamente stabile e il diagramma di Nyquist non circonda e non tocca -1 allora il sistema *closed loop* è asintoticamente stabile.
- Se il sistema *open loop* non è asintoticamente stabile si controlla il numero di rotazioni antiorarie attorno a -1 se queste sono tante quante il numero di poli del sistema *open loop* allora il sistema è asintoticamente stabile.

3 Diagramma di Nyquist I

3.2 Disegno a mano

Premessa: quanto segue non risulta allineato al materiale del professore.

Si consiglia la visione dei seguenti video a cura del canale *Smart Engineer* (ennesima puntata de "indiani che ci salvano la vita")

① **Nyquist plot in control system.**

<https://www.youtube.com/watch?v=64zZ-mDhdtk>

② **Nyquist plot — when pole is at origin — find range of 'K' — Control system.**

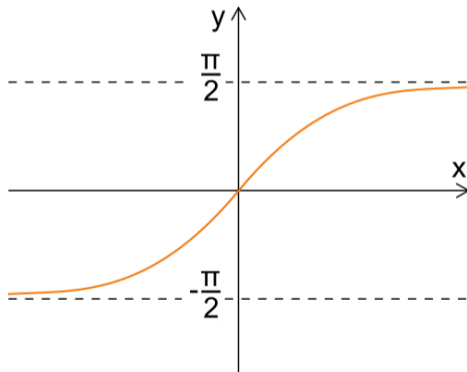
<https://www.youtube.com/watch?v=hGgG28fiHHo>

Vogliamo disegnare a mano il diagramma di Nyquist, data una particolare funzione di trasferimento $G(s)$. Le spiegazioni seguenti si ispirano a questi video e cercano di costruire un metodo dove ogni tratto di disegno è giustificato da un punto di vista teorico.

3 Diagramma di Nyquist II

3.2 Disegno a mano

Promemoria. Grafico generico dell'arcotangente (ovviamente nel caso nostro tende a $-\frac{\pi}{2}$ e non a $\frac{\pi}{2}$ per il segno negativo presente dentro l'arcotangente)



3 Diagramma di Nyquist III

3.2 Disegno a mano

Esercizio che usiamo per introdurre

Si disegni il diagramma di Nyquist del seguente sistema

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

Dopo aver fatto il disegno si verifichi la stabilità utilizzando l'apposito criterio.

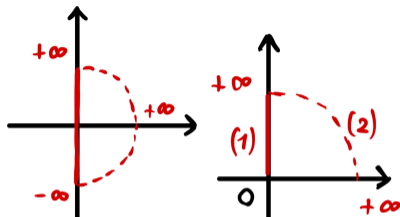
La risoluzione dell'esercizio passa dal gestire due sezioni della curva di Nyquist:

- 1 l'asse immaginario;
- 2 il resto della curva (la parte tratteggiata).

La buona notizia è che il diagramma di Nyquist è caratterizzato da simmetria rispetto all'asse dei reali. Questo significa che dobbiamo lavorare solo su metà della curva di Nyquist:

3 Diagramma di Nyquist IV

3.2 Disegno a mano



Rimane la divisione dell'esercizio in due parti (quelle indicate nella figura a destra).

1 Prima parte: asse immaginario.

Analizziamo cosa succede quando la frequenza ω va da 0 a $+\infty$. Calcoliamo $G(j\omega)$ distinguendo parte reale da parte immaginaria.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} \frac{(1-j\omega)(2-j\omega)}{(1-j\omega)(2-j\omega)} = \frac{2-j\omega-2j\omega-\omega^2}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} = \\ &= \frac{2-\omega^2}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} + j \frac{-3\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \end{aligned}$$

3 Diagramma di Nyquist V

3.2 Disegno a mano

Calcoliamo il modulo $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2 - \omega^2}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{-3\omega}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)}\right)^2}$$

Per quanto riguarda $\angle G(j\omega)$ facciamo in modo di avere una fattorizzazione con fattori della forma $(\alpha s + 1)$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{1}{2(j\omega + 1)(j0.5\omega + 1)}$$
$$\implies \angle G(j\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan(0.5\omega)$$

Con la somma algebrica di arcotangente ci semplifichiamo la vita. Regola da considerare

- ▶ Abbiamo una somma algebrica di arctan
- ▶ Dato un fattore $(j\alpha\omega + 1)$ poniamo $\arctan(\alpha\omega)$.

3 Diagramma di Nyquist VI

3.2 Disegno a mano

- ▶ Se si tratta di un polo l'arcotangente è preceduto da segno negativo.
- ▶ Se si tratta di uno zero l'arcotangente è preceduto da segno positivo.
- ▶ Nel caso in cui si ottenga una cosa del tipo $\arctan(-\alpha\omega)$ sostituiamo così

$$\arctan(-\alpha\omega) = 180 \text{ deg} - \arctan(\alpha\omega)$$

- ▶ Per poli e zeri nell'origine si veda nelle diapositive successive.

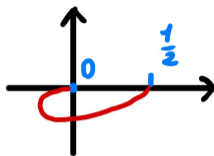
Troviamo i valori di riferimento

	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$\omega = 0$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-0 \text{ deg} - 0 \text{ deg} = 0 \text{ deg}$
$\omega = +\infty$	0	0	0	$-90 \text{ deg} - 90 \text{ deg} = -180 \text{ deg}$

$|G(j\omega)|$ si può dire al volo che è 0 dato che $G(s)$ è una *strictly proper function*, cioè una funzione dove il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore. Dai punti scritti in tabella ci aspettiamo una curva di questo tipo

3 Diagramma di Nyquist VII

3.2 Disegno a mano



Vogliamo essere precisi e desideriamo calcolare il punto in cui avviene l'intersezione con l'asse degli immaginari. Imponiamo $\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0$, cioè

$$\frac{(2 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \rightarrow 2 - \omega^2 = 0 \implies \omega = \sqrt{2}$$

Sostituisco $\omega = \sqrt{2}$ in $\text{Im}\{G(j\omega)\}$

$$\text{Im}\{G(j\sqrt{2})\} = -\frac{3\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2}^2)^2 + 9\sqrt{2}^2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \approx -0.236$$

3 Diagramma di Nyquist VIII

3.2 Disegno a mano

② Seconda parte: curva tratteggiata.

La seconda parte della curva di Nyquist è un tratto circonferenza con raggio ∞ . Noi percorriamo tale circonferenza da $\theta = 90 \text{ deg}$ a $\theta = 0 \text{ deg}$.

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} = \infty e^{j\theta}$$

Sostituiamo s in $G(s)$ considerando che s posto è molto grande, conseguentemente possiamo approssimare $(s + a) \approx (s)$ poichè $s \gg a$

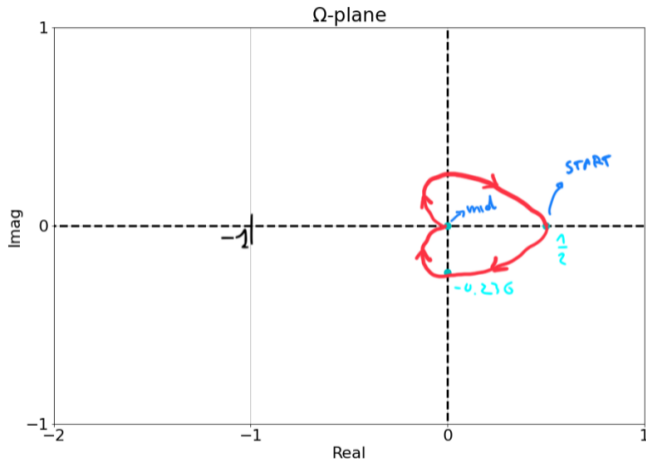
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \approx \frac{1}{s \cdot s} = \frac{1}{s^2} = \frac{1}{(Re^{j\theta})^2} = \frac{1}{R^2} e^{-j2\theta} = 0 e^{-j2\theta}$$

Dato che il modulo è nullo rimaniamo nell'origine, non c'è altro da disegnare.

Ribaltando la figura ottenuta rispetto all'asse dei reali otteniamo il diagramma di Nyquist

3 Diagramma di Nyquist IX

3.2 Disegno a mano



3 Diagramma di Nyquist X

3.2 Disegno a mano

Concludiamo: possiamo dire che il sistema è asintoticamente stabile?

- I poli del sistema *open loop* sono le radici di $s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$.
- Il sistema *open loop* è sicuramente stabile dato che non esistono poli con $\text{Re} > 0$
- Osserviamo dal diagramma di Nyquist che -1 è cosa a se rispetto al diagramma (non è attraversato e non si hanno rotazioni attorno ad esso)

\Rightarrow Il sistema *closed loop* è asintoticamente stabile!

3 Diagramma di Nyquist XI

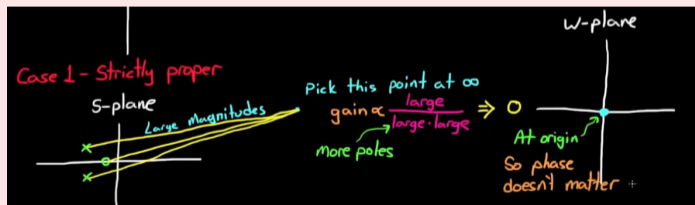
3.2 Disegno a mano

strictly proper function

Si parla di **strictly proper function** se il grado di $N(s)$ è inferiore al grado di $D(s)$.

In queste funzioni avremo un numero di poli maggiore rispetto al numero di zeri: se si sceglie un punto che tende a ∞ allora il guadagno tende a zero. Questo perchè nel calcolo del modulo si divide per ∞ (ripetiamo, numero di poli superiore a quello degli zeri)

$$\frac{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots}$$



3 Diagramma di Nyquist I

3.3 Poli lungo l'asse immaginario

Consegna

Si disegni il diagramma di Nyquist del seguente sistema

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Dopo aver fatto il disegno si verifichi la stabilità utilizzando l'apposito criterio.

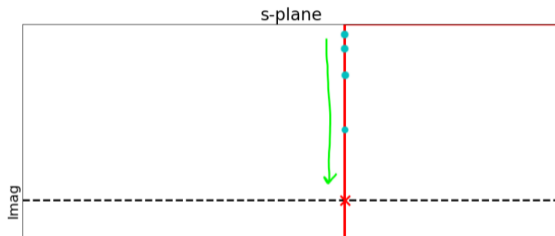
Prendiamo questo esempio di sistema per affrontare una questione rilevante, relativa ai poli collocati lungo l'asse degli immaginari. Ricordiamoci come si trova modulo e fase di un punto nel piano di Ω , partendo dal corrispondente punto nel piano s .

- **Modulo.** Il modulo consiste nel prodotto tra i moduli dei fasori relativi agli zeri, fratto il prodotto dei moduli relativi ai poli.
- **Fase.** La fase consiste nella somma algebrica delle fasi relative a zeri e poli, dove le fasi relative agli zeri hanno segno positivo e quelle relative ai poli segno negativo.

3 Diagramma di Nyquist II

3.3 Poli lungo l'asse immaginario

Cosa succede se ci avviciniamo al polo nell'origine?



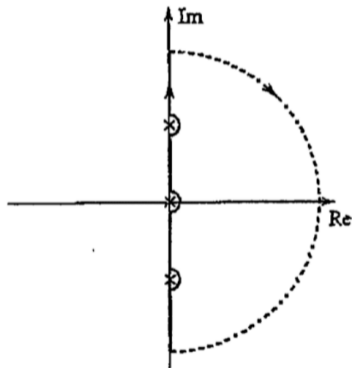
- La fase è 90 deg.
- Il modulo diventa piccolo e tende a infinito: questo perchè abbiamo una divisione per un numero molto piccolo al denominatore.
- Arrivati al polo la fase è indefinita.

Non ci va bene avere fase indefinita: come ci comportiamo?

3 Diagramma di Nyquist III

3.3 Poli lungo l'asse immaginario

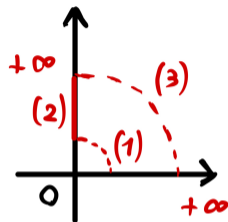
Alteriamo la curva di Nyquist escludendo da essa i poli lungo l'asse immaginario (e quindi quello sull'origine)



Detto tutto questo possiamo risolvere l'esercizio

3 Diagramma di Nyquist IV

3.3 Poli lungo l'asse immaginario



1 Prima parte.

Nella prima percorriamo una circonferenza con raggio $\rightarrow 0$. Si percorre tale circonferenza da $\theta = 0$ deg a 90 deg.

$$s = \lim_{R \rightarrow 0} R e^{j\theta} = 0 e^{j\theta}$$

Sostituiamo in $G(s)$ considerando che s posto è molto piccolo, conseguentemente possiamo approssimare $(s + a) \approx a$ poichè $s \ll a$. In questo caso non c'è nulla da approssimare dato che abbiamo preso l'esempio più elementare di tutti

3 Diagramma di Nyquist V

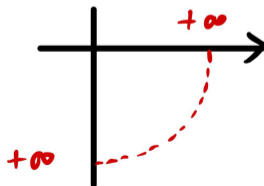
3.3 Poli lungo l'asse immaginario

$$G(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{Re^{j\theta}} = \frac{1}{R}e^{-j\theta} = \infty e^{-j\theta}$$

Angoli considerati

θ_i	θ_f
0 deg	0 deg
90 deg	-90 deg

Il risultato è una circonferenza di raggio infinito nel quarto quadrante, che va da 0 deg a -90 deg.



3 Diagramma di Nyquist VI

3.3 Poli lungo l'asse immaginario

2 Seconda parte.

Abbiamo inizialmente una frequenza $\theta = 0$: cosa succede quando poniamo $\theta \rightarrow \infty$?

Calcoliamo $G(j\omega)$ distinguendo parte reale da parte immaginaria

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{-j}{-j} = j \left(-\frac{1}{\omega} \right)$$

Calcoliamo $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$. Riguardo $\angle G(j\omega)$ si introduce un'ulteriore regola: si pone un 90 deg per ogni polo e zero nell'origine (segno positivo se zero, segno negativo se polo)

$$|G(j\omega)| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{\omega} \right)^2} = \frac{1}{|\omega|}$$

$$\angle G(j\omega) = -90 \text{ deg}$$

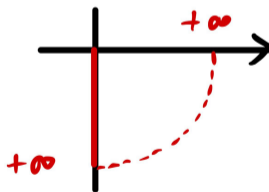
Segue

3 Diagramma di Nyquist VII

3.3 Poli lungo l'asse immaginario

	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$\omega = 0$	0	$-\infty$	∞	-90 deg
$\omega = +\infty$	0	0	0	-90 deg

La parte reale è sempre nulla (siamo lungo l'asse immaginario), la parte immaginaria va da $-\infty$ a 0. Otteniamo



3 Diagramma di Nyquist VIII

3.3 Poli lungo l'asse immaginario

3 Terza parte.

La terza parte della curva di Nyquist è un tratto di circonferenza con raggio ∞ . Noi percorriamo tale circonferenza da $\theta = 90 \text{ deg}$ a $\theta = 0 \text{ deg}$

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta} = \infty e^{j\theta}$$

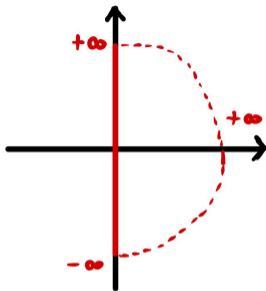
Sostituendo in $G(s)$ concludiamo che non si esprimono ulteriori contributi al diagramma, dato che si rimane nell'origine (il modulo è nullo).

$$G(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{R e^{j\theta}} = \frac{1}{R} e^{-j\theta} = 0 e^{-j\theta}$$

Ribaltiamo il grafico rispetto all'asse dei reali (il diagramma di Nyquist è simmetrico rispetto all'asse dei reali) per concludere.

3 Diagramma di Nyquist IX

3.3 Poli lungo l'asse immaginario



Il numero di poli dell'*open loop* presenti nel RHP è $P = 0$, abbiamo solo un polo nell'origine. Il numero di rotazioni attorno a -1 è $N = 0$, segue

$$Z = N + P = 0$$

Zero rotazioni attorno al punto critico -1 : il sistema è stabile ai sensi del criterio di Nyquist.

3 Diagramma di Nyquist

3.4 Zeri lungo l'asse immaginario

Cosa succede con zeri lungo l'asse immaginario?

- Il modulo tende a zero e non a infinito come nel caso dei poli.
- La fase è indefinita, ma non è un problema dato che con modulo tendente a zero il punto è l'origine (avere una fase in un modo o nell'altro non altera il punto considerato).

Non c'è necessità di modifica della curva di Nyquist, dato che escludere gli zeri (esattamente come abbiamo fatto con i poli) porterebbe agli stessi risultati.

4 Esempi di diagrammi di Nyquist I

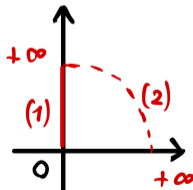
4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0

Consegna

Si disegni il diagramma di Nyquist del seguente sistema

$$G(s) = \frac{1 + s}{(1 - 2s)(1 - 3s)}$$

Dopo aver fatto il disegno si verifichi la stabilità utilizzando l'apposito criterio.



4 Esempi di diagrammi di Nyquist II

4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0

1 Prima parte: asse immaginario.

Analizziamo cosa succede quando la frequenza ω va da 0 a $+\infty$. Calcoliamo $G(j\omega)$ distinguendo parte reale da parte immaginaria.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{(1 + j\omega)}{(1 - j2\omega)(1 - j3\omega)} = \frac{(1 + j\omega)}{(1 - j2\omega)(1 - j3\omega)} \cdot \frac{(1 + j2\omega)(1 + j3\omega)}{(1 + j2\omega)(1 + j3\omega)} = \\ &= \frac{1 - 11\omega^2}{(1 + 4\omega^2)(1 + 9\omega^2)} + j \frac{6\omega - 6\omega^3}{(1 + 4\omega^2)(1 + 9\omega^2)} \end{aligned}$$

Calcoliamo il modulo $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

4 Esempi di diagrammi di Nyquist III

4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0

Per quanto riguarda $\angle G(j\omega)$ facciamo in modo di avere una fattorizzazione con fattori della forma $(\alpha s + 1)$

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1)}{(-j2\omega + 1)(-j3\omega + 1)}$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow \angle G(j\omega) &= \arctan(\omega) - \arctan(-2\omega) - \arctan(-3\omega) = \\ &= \arctan(\omega) - 180 \text{ deg} + \arctan(2\omega) - 180 \text{ deg} + \arctan(3\omega)\end{aligned}$$

Troviamo i valori di riferimento

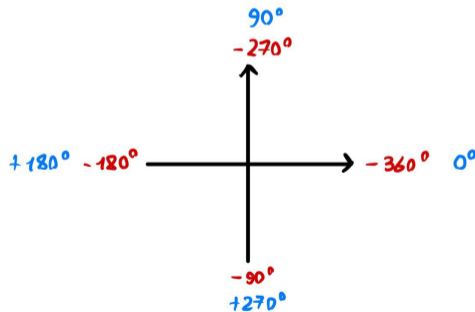
	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$\omega = 0$	1	0	1	-360 deg
$\omega = +\infty$	0	0	0	-90 deg

4 Esempi di diagrammi di Nyquist IV

4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0

$|G(j\omega)|$ con $\omega = +\infty$ si può dire al volo che è 0 (*strictly proper function*).

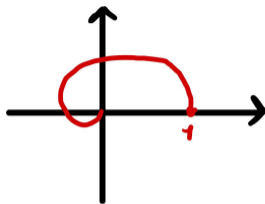
Attenzione agli angoli restituiti dai nostri calcoli: non ci passi per il capo di dire $-360 \text{ deg} \rightarrow 0 \text{ deg}$, il grafico ottenuto a partire da questa assunzione non è corretto! Dobbiamo muoverci da -360 deg a -90 deg



4 Esempi di diagrammi di Nyquist V

4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0

Otteniamo



Ai fini della risoluzione dell'esercizio è necessario calcolare l'intersezione con l'asse dei reali (fa differenza nell'applicazione del criterio di Nyquist sapere dove si trova il punto).
Imponiamo $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$, cioè

$$6\omega - 6\omega^3 = 0 \rightarrow 6\omega(-\omega^2 + 1) = 0 \rightarrow \omega = -1$$

$$\text{Sostituisco } \omega = -1 \text{ in } \text{Re}\{G(j\omega)\}: \text{Re}\{G(j1)\} = \frac{1 - 11(-1)^2}{(1 + 4(-1)^2)(1 + 9(-1)^2)} = -0.2$$

4 Esempi di diagrammi di Nyquist VI

4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0

2 Seconda parte: curva tratteggiata.

La seconda parte della curva di Nyquist è un tratto circonferenza con raggio ∞ . Noi percorriamo tale circonferenza da $\theta = 90$ deg a $\theta = 0$ deg.

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} = \infty e^{j\theta}$$

Sostituiamo s in $G(s)$ considerando che s posto è molto grande, conseguentemente possiamo approssimare $(s + a) \approx (s)$ poichè $s \gg a$

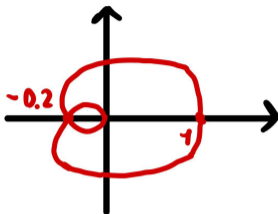
$$G(s) = \frac{1 + s}{(1 - 2s)(1 - 3s)} \approx \frac{s}{-2s \cdot (-3s)} = \frac{s}{6s^2} = \frac{1}{6s} = \frac{1}{6Re^{j\theta}} = \frac{1}{6R}e^{-j\theta} = 0e^{-j\theta}$$

Dato che il modulo è nullo rimaniamo nell'origine, non c'è altro da disegnare.

Ribaltando la figura ottenuta rispetto all'asse dei reali otteniamo il diagramma di Nyquist

4 Esempi di diagrammi di Nyquist VII

4.1 Primo esempio: uno zero e due poli, system type 0



Concludiamo: possiamo dire che il sistema è asintoticamente stabile?

- I poli del sistema *open loop* sono le radici di $(1 - 2s)(1 - 3s) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$.
- Il sistema *open loop* ha entrambi i poli con $\text{Re} > 0$, quindi $P = 0$.
- Ai sensi del criterio di Nyquist dovrei avere $N = -P$ per ottenere $Z = 0$ rotazioni attorno al punto critico -1 : questo significa che dovrei avere un numero di rotazioni antiorarie attorno a -1 pari al numero di poli nel RHP.
- Abbiamo questa cosa? No. \implies Il sistema *closed loop* è instabile!

4 Esempi di diagrammi di Nyquist I

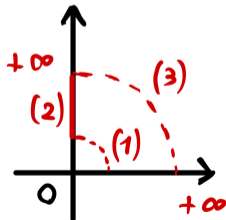
4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Consegna

Si disegni il diagramma di Nyquist del seguente sistema

$$G(s) = \frac{10(s + 10)}{s(s + 1)}$$

Dopo aver fatto il disegno si verifichi la stabilità utilizzando l'apposito criterio.



4 Esempi di diagrammi di Nyquist II

4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1

1 Prima parte.

Nella prima percorriamo una circonferenza con raggio $\rightarrow 0$. Si percorre tale circonferenza da $\theta = 0$ deg a 90 deg.

$$s = \lim_{R \rightarrow 0} Re^{j\theta} = 0e^{j\theta}$$

Sostituiamo in $G(s)$ considerando che s posto è molto piccolo, conseguentemente possiamo approssimare $(s + a) \approx a$ poichè $s \ll a$.

$$G(s) = \frac{10(s + 10)}{s(s + 1)} \approx \frac{100}{s} = \frac{100}{Re^{j\theta}} = \frac{100}{R} e^{-j\theta}$$

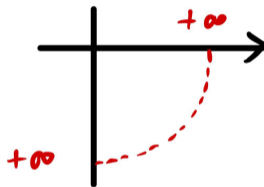
Angoli considerati

θ_i	θ_f
0 deg	0 deg
90 deg	-90 deg

4 Esempi di diagrammi di Nyquist III

4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Il risultato è una circonferenza di raggio infinito nel quarto quadrante, che va da 0 deg a -90 deg.



2 Seconda parte.

Abbiamo inizialmente una frequenza $\theta = 0$: cosa succede quando poniamo $\theta \rightarrow \infty$?
Calcoliamo $G(j\omega)$ distinguendo parte reale da parte immaginaria

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 10)}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{100(j0.1\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 1)} \cdot \frac{-j\omega(1 - j\omega)}{-j\omega(1 - j\omega)} = \left(\frac{-90}{\omega^2 + 1} \right) + j \left(\frac{-10\omega - 100}{\omega(\omega^2 + 1)} \right)$$

4 Esempi di diagrammi di Nyquist IV

4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Calcoliamo $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-90}{\omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-10\omega - 100}{\omega(\omega^2 + 1)}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan(0.1\omega) - 90 \text{ deg} - \arctan(\omega)$$

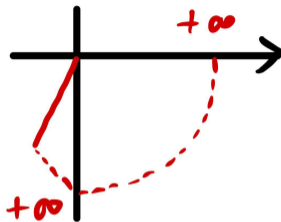
Segue

	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$\omega = 0$	-90	$-\infty$	$+\infty$	-90 deg
$\omega = +\infty$	0	0	0	-90 deg

La componente reale non è sempre nulla, ma assume valori finiti $\neq 0$. Otteniamo

4 Esempi di diagrammi di Nyquist V

4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1



3 Terza parte.

La terza parte della curva di Nyquist è un tratto di circonferenza con raggio ∞ . Noi percorriamo tale circonferenza da $\theta = 90 \text{ deg}$ a $\theta = 0 \text{ deg}$

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta} = \infty e^{j\theta}$$

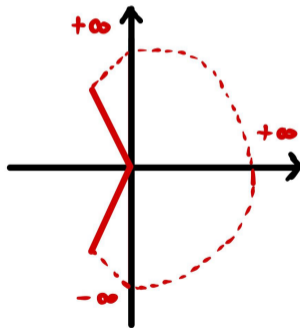
Sostituendo in $G(s)$ concludiamo che non si esprimono ulteriori contributi al diagramma, dato che si rimane nell'origine (il modulo è nullo).

4 Esempi di diagrammi di Nyquist VI

4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1

$$G(s) = \frac{10(s + 10)}{s(s + 1)} \approx \frac{10s}{s^2} = \frac{10}{s} = \frac{10}{Re^{j\theta}} = \frac{10}{R}e^{-j\theta} = 0e^{-j\theta}$$

Ribaltiamo il grafico rispetto all'asse dei reali (il diagramma di Nyquist è simmetrico rispetto all'asse dei reali) per concludere.



4 Esempi di diagrammi di Nyquist VII

4.2 Secondo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Il numero di poli dell'*open loop* presenti nel RHP è $P = 0$, abbiamo solo un polo nell'origine. Il numero di rotazioni attorno a -1 è $N = 0$, segue

$$Z = N + P = 0$$

Zero rotazioni attorno al punto critico -1

Il sistema è stabile ai sensi del criterio di Nyquist.

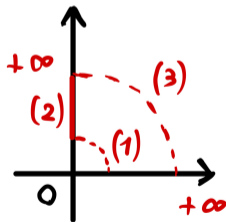
4 Esempi di diagrammi di Nyquist I

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Consegna

Si disegni il diagramma di Nyquist del seguente sistema

$$G(s) = \frac{s + 2}{s(s - 1)}$$



4 Esempi di diagrammi di Nyquist II

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1

1 Prima parte.

Nella prima percorriamo una circonferenza con raggio $\rightarrow 0$. Si percorre tale circonferenza da $\theta = 0$ deg a 90 deg.

$$s = \lim_{R \rightarrow 0} R e^{j\theta} = 0 e^{j\theta}$$

Sostituiamo in $G(s)$ considerando che s posto è molto piccolo, conseguentemente possiamo approssimare $(s + a) \approx a$ poichè $s \ll a$.

$$G(s) = \frac{s + 2}{s(s - 1)} \approx \frac{2}{-s} = \frac{-2}{R e^{j\theta}} = -\frac{2}{R} e^{-j\theta} = \frac{2}{R} e^{-j(\theta - 180)} = \infty e^{-j(\theta - 180)}$$

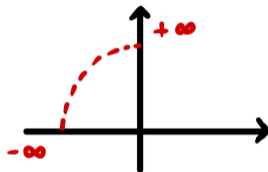
Angoli considerati

θ_i	θ_f
0 deg	+180 deg
90 deg	+90 deg

4 Esempi di diagrammi di Nyquist III

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Il risultato è una circonferenza di raggio infinito nel secondo quadrante, che va da +180 deg a +90 deg.



2 Seconda parte.

Abbiamo inizialmente una frequenza $\theta = 0$: cosa succede quando poniamo $\theta \rightarrow \infty$?
Calcoliamo $G(j\omega)$ distinguendo parte reale da parte immaginaria

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{-2(j0.5\omega + 1)}{j\omega(-j\omega + 1)} \cdot \frac{-j\omega(1 + j\omega)}{-j\omega(1 + j\omega)} = \left(\frac{-3}{1 + \omega^2} \right) + j \left(\frac{-\omega^2 + 2}{\omega(1 + \omega^2)} \right)$$

4 Esempi di diagrammi di Nyquist IV

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Calcoliamo $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$.

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-3}{1+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega^2+2}{\omega(1+\omega^2)}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan(0.5\omega) - 90 \text{ deg} - 180 \text{ deg} + \arctan(\omega)$$

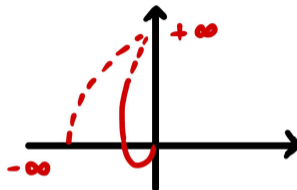
Segue

	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$\omega = 0$	-3	$+\infty$	$+\infty$	-270 deg
$\omega = +\infty$	0	0	0	-90 deg

La componente reale non è sempre nulla, ma assume valori finiti $\neq 0$. Otteniamo

4 Esempi di diagrammi di Nyquist V

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1



Calcoliamo l'intersezione con l'asse dei reali, imponendo $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$

$$\text{Im}[G(j\omega)] = -\omega^2 + 2 = 0 \rightarrow \omega^2 = 2 \rightarrow \omega = -\sqrt{2}$$

Sostituisco in $\text{Re}[G(j\omega)]$: $\text{Re}[G(j\omega)] = \frac{-3}{1+2} = -1$

4 Esempi di diagrammi di Nyquist VI

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1

3 Terza parte.

La terza parte della curva di Nyquist è un tratto di circonferenza con raggio ∞ . Noi percorriamo tale circonferenza da $\theta = 90 \text{ deg}$ a $\theta = 0 \text{ deg}$

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta} = \infty e^{j\theta}$$

Sostituendo in $G(s)$ concludiamo che non si esprimono ulteriori contributi al diagramma, dato che si rimane nell'origine (il modulo è nullo).

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s-1)} \approx \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s} = \frac{1}{R e^{j\theta}} = \frac{1}{R} e^{-j\theta} = 0 e^{-j\theta}$$

4 Esempi di diagrammi di Nyquist VII

4.3 Terzo esempio: uno zero e due poli, system type 1

Ribaltiamo il grafico rispetto all'asse dei reali (il diagramma di Nyquist è simmetrico rispetto all'asse dei reali) per concludere.

